RSS Higher Certificate in Statistics, 2010

Module 6 : Further applications of statistics

Solutions

Question 1

(i) 分散分析の“修正項”は$\dfrac{877.8^2}{25} = 30821.3136$なので

全平方和は$32186.08 - 30821.3136 = 1364.7664$で，自由度は 25－1 = 24.

方法の平方和は

$$\frac{213.6^2}{8} + \frac{185.0^2}{5} + \frac{170.8^2}{4} + \frac{170.8^2}{4} + \frac{137.6^2}{4} - 30821.3136 = 1046.5664 \quad (\text{自由度 } 4)$$

残差平方和とその自由度は引き算で得られる.

よって完全な分散分析表は以下のようになる.

SOURCE OF VARIATION	DEGREES OF FREEDOM	SUM OF SQUARES	MEAN SQUARE	*F* value
Methods	4	1046.5664	261.6416	16.45
Residual	20	318.2000	15.91	$= \hat{\sigma}^2$
TOTAL	24	1364.7664		

$F_{4,20}$によると F 値は非常に高有意である．上側 0.1%限界点が 7.10 なので，方法間の平均の違いには極めて強い証拠があると言える.

この分析の基礎となるモデルは

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

である．ただし，y_{ij} は i 番目の方法で得られた j 番目の結果を，μ は結果に対する全体の母平均を，α_i は i 番目の方法による結果と μ との差の母平均を，ε_{ij} は独立に正規分布 $N(0,\sigma^2)$（σ^2 は定数）に従うランダムな残差を表す.

(ii) 方法 S と方法 A の生産量平均はそれぞれ 26.7 と 37.0 で，それぞれ 8 つの観測値，5 つの観測値の平均である．それゆえ，平均間の差の分散は，σ^2 を各生産量の分散としたときに$\left(1/8 + 1/5\right)\sigma^2$となる．これは$\left(\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{5}\right) \times 15.91 = 5.17075$で推定される.

t_{20} の両側 5%点は 2.086 であるから，真の平均の差 A－S の 95%信頼区間は

$$10.3 \pm 2.086\sqrt{5.17075} = (5.56,\ 15.04)$$

(iii) 各残差は以下のとおり．

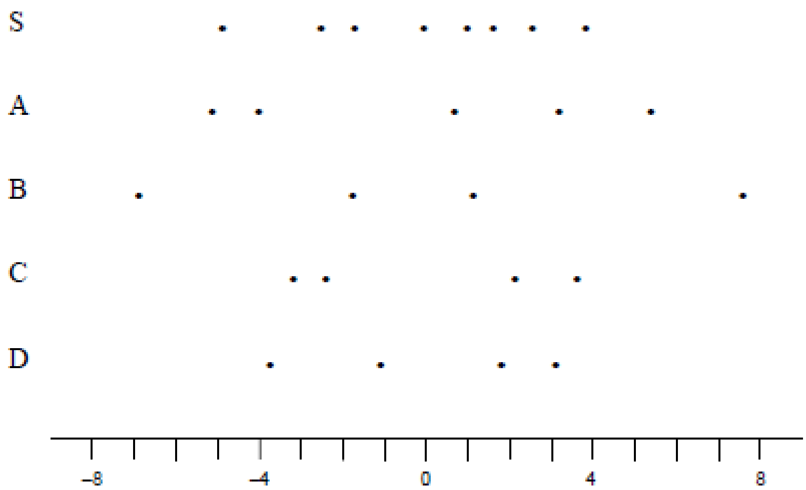
A: –5.2, 0.7, –4.1, 3.2, 5.4

B: –7.0, –1.8, 7.7, 1.1

C: –2.5, –3.2, 3.6, 2.1

D: –3.8, –1.1, 1.8, 3.1

(iv)



分散は一定とは言えなさそうだ（たとえば，B の観測は C や D の観測よりもかなりばらついている）．正規性もなさそうだ——正規分布に従うとみなしたように 0 付近に集まっている方法は部分的にしか見られない．

Question 2

(i) モデルは$Y=\beta X+\gamma Z$で，観測値を$\left(x_i,y_i,z_i\right)$ $(i=1,2,\dots,n)$とする．

$S=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\beta x_i-\gamma z_i\right)^2$ が最小になるときを考える．

微分したものが 0 に等しくなるように定めればよい．（厳密には，最小値をとることを示すために 2 階微分の確認もするべきだが，ここでは省略する．）

$\dfrac{\delta S}{\delta\beta}=-2\sum x_i\left(y_i-\beta x_i-\gamma z_i\right)$ なので，これが 0 になるとき $\sum x_iy_i=\hat\beta\sum x_i^2+\hat\gamma\sum x_iz_i$.

$\dfrac{\delta S}{\delta\gamma}=-2\sum z_i\left(y_i-\beta x_i-\gamma z_i\right)$ なので，これが 0 になるとき $\sum z_iy_i=\hat\beta\sum x_iz_i+\hat\gamma\sum z_i^2$.

これらの方程式は次のように共に解くことができる．
第 1 式に$\sum z_i^2$ をかけ，第 2 式に$\sum x_iz_i$ をかけると

$$\sum x_iy_i\sum z_i^2=\hat\beta\sum x_i^2\sum z_i^2+\hat\gamma\sum x_iz_i\sum z_i^2$$

$$\sum z_iy_i\sum x_iz_i=\hat\beta\left(\sum x_iz_i\right)^2+\hat\gamma\sum z_i^2\sum x_iz_i$$

辺々引いて，以下を得る．

$$\hat\beta=\frac{\sum x_iy_i\sum z_i^2-\sum x_iz_i\sum z_iy_i}{\sum x_i^2\sum z_i^2-\left(\sum x_iz_i\right)^2}$$

同様にして，第 1 式に$\sum x_iz_i$ をかけたものから第 2 式に$\sum x_i^2$ をかけたものを引くことによって，以下を得る．

$$\hat\gamma=\frac{\sum z_iy_i\sum x_i^2-\sum x_iz_i\sum x_iy_i}{\sum x_i^2\sum z_i^2-\left(\sum x_iz_i\right)^2}$$

(ii) (a) (i)のすべての Z を単に X^2 で置き換えればよい．各推定量は

$$\hat\beta=\frac{\sum x_iy_i\sum x_i^4-\sum x_i^3\sum x_i^2y_i}{\sum x_i^2\sum x_i^4-\left(\sum x_i^3\right)^2},\quad \hat\gamma=\frac{\sum x_i^2y_i\sum x_i^2-\sum x_i^3\sum x_iy_i}{\sum x_i^2\sum x_i^4-\left(\sum x_i^3\right)^2}$$

となる．

(b) X^2 を独自の変数として扱うことによって $Y,\ X,\ X^2$ についてのデータの列（それぞれ n 行）を定める．

コンピュータプログラムを用いてモデル $Y=\beta X+\gamma X^2$ にあてはめよ（これは，プログラムのどんな “回帰の定数項” オプションも利用しないことによって達成されるだろう）．

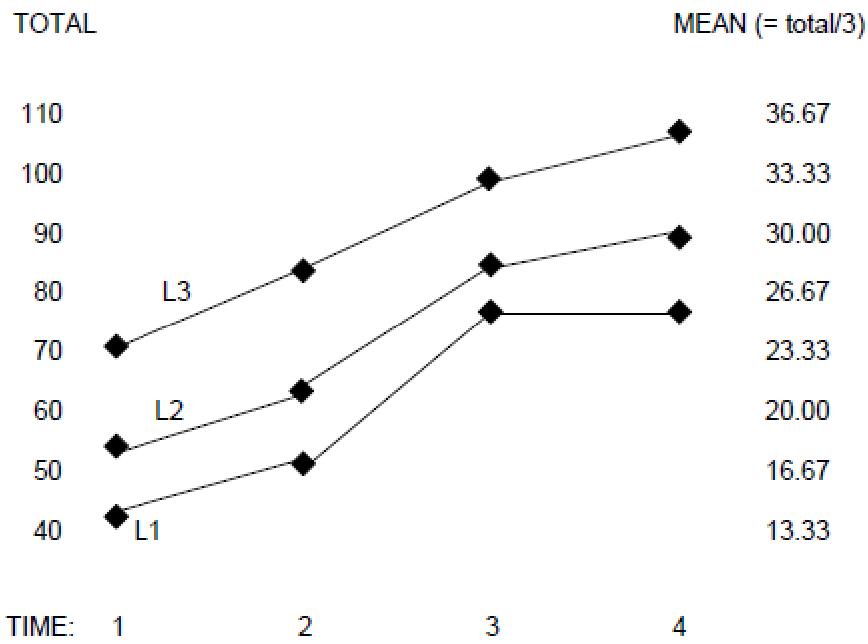
また，コンピュータプログラムを用いてモデル $Y = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ にもあてはめよ（このとき，“回帰の定数項”オプションはデフォルトである）．出力（つまり，α の推定量の値と標準誤差）の情報を用いて $\alpha = 0$ に対する通常の t 検定を実行せよ．
各モデルにおいて，通常の F 検定によって全体の回帰適合度を確認し，回帰平均平方と残差平均平方を比較せよ．R^2 値も参考になるかもしれない．

そして各モデルの残差を見よ．パターン（ランダムな正規分布的な観測のように見えるか?）と残差の大きさを比較せよ．系統的なパターンの兆候や湾曲があるだろうか．

最後に，出力で識別される，影響力のあるデータの項を確認せよ．

Question 3

(i)



(ii) 分散分析の“補正項”は $\frac{891^2}{36} = 22052.25$ である.

全平方和(1596.75)はその自由度(35)とともに問題文中に与えられている.

ブロックの平方和は

$$\frac{265^2}{12} + \frac{294^2}{12} + \frac{332^2}{12} - 22052.25 = 188.17$$ （問題文中の表より，自由度 2）

時刻(T)の平方和は

$$\frac{166^2}{9} + \frac{196^2}{9} + \frac{258^2}{9} + \frac{271^2}{9} - 22052.25 = 834.08$$ （自由度 3）

レベル(L)の平方和は

$$\frac{245^2}{12} + \frac{289^2}{12} + \frac{357^2}{12} - 22052.25 = 530.67$$ （自由度 2）

“処理”の全平方和は問題文中で与えられている（1375.42）ので，引き算により $T \times L$ の交互作用の全平方和は $1375.42 - 834.08 - 530.67 = 10.67$ と求められ，これは自由度 $3 \times 2 = 6$ を持つ.

残差平方和と残差の自由度は引き算で得られる.

よって完成した分散分析表は以下のようになる.

SOURCE OF VARIATION	DEGREES OF FREEDOM	SUM OF SQUARES	MEAN SQUARE	*F* VALUE
Blocks	2	188.17	94.085	62.4
T	3	834.08	278.027	184.5
L	2	530.67	265.335	176.1
T × L	6	10.67	1.778	1.2
Treatments	11	1375.42		
Residual	22	33.16	1.507	
TOTAL	35	1596.75		

(iii) F 値は各 F 分布を参照する．T と L の F 値はかなり高有意である．$T \times L$ の交互作用の F 値は有意でない（$F_{6,24}$ の上側 5%棄却点は 2.51 である）．ブロック間に全体的な差異がある（から，無作為化ブロックを設定して実験を行った価値があった）という非常に強い証拠があり，時刻(T)の平均間及びレベル(L)の平均間の差異もあるが，これらの効果の交互作用には証拠はない，と結論づけられる．

データの検査や(i)で描いたグラフの検査を見ると，全時刻における L1 から L2，L3 までの収穫量，および全レベルにおける T1 から T2，T3，T4 までの収穫量が増加している（このデータセットでは，実際にはレベル L1 では T3 から T4 までは同じままであるが，実際の交互作用の証拠はない．）ことが読み取れる．

Question 4

サンプル内の不良品の数を X とする．

(i) 方法 I では， $X \sim B(24, 0.1)$ とみなせる．

$P(\text{不合格}) = P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0,1,2)$

$= 1 - \left(0.9^{24} + 24 \cdot 0.1 \cdot 0.9^{23} + \frac{24 \times 23}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^{22}\right) = 0.4357$

(ii) 方法 II では， $X \sim B(12, 0.1)$ とみなせる．

(a) $P(\text{1回目のサンプルを抜き取るだけでバッチが合格となる})$

$= P(X = 0) = 0.9^{12} = 0.2824$

(b) $P(\text{1回目のサンプルを抜き取るだけでバッチが不合格となる})$

$= P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0,1,2)$

$= 1 - \left(0.9^{12} + 12 \cdot 0.1 \cdot 0.9^{11} + \frac{12 \times 11}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^{10}\right)$

$= 0.1109$

(c) 両サンプルが抜き取られた後バッチが不合格となるのは,
1 回目のサンプルに不良品が 1 個，2 回目のサンプルに不良品が 2 個以上あるときか,
1 回目のサンプルに不良品が 2 個、2 回目のサンプルに不良品が 1 個以上あるとき．

よって求める確率は,

$P(X = 1)P(X \geq 2) + P(X = 2)P(X \geq 1)$

$= \left(12 \cdot 0.1 \cdot 0.9^{11}\right)\left\{1 - \left(0.9^{12} + 12 \cdot 0.1 \cdot 0.9^{11}\right)\right\} + \left(\frac{12 \times 11}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^{10}\right)\left(1 - 0.9^{12}\right)$

$= 0.1284 + 0.1651 = 0.2935$

(iii) 方法 II を採用したときにバッチが不合格となる全体の確率は，(ii)(b),(c)より $0.1109 + 0.2935 = 0.4044$ である．方法 I の方がわずかに高い確率 0.4357 を与える．(iv)の最後のコメントを見よ．

(iv) (ii)(a),(b)の結果から，方法 II において，1 回だけのサンプルの後に決定する確率は $0.2824 + 0.1109 = 0.3933$ だとわかる．よって 2 回目のサンプルが必要な確率は $1 - 0.3933 = 0.6067$

$\therefore$ 方法 II におけるサンプルサイズの平均 $= 12 \times 0.3933 + 24 \times 0.6067 = 19.28$

このように，方法IIはサンプルサイズの平均が方法 I よりも 5 近く少ない．さらに（(iii) を見ると），方法IIにおけるバッチが不合格となる確率は方法 I における確率よりかなり小さいというわけではない．だから，サンプルサイズの平均が小さく，棄却率がほんのちょっと小さいだけの方法IIが好ましいと考えられる．