RSS Higher Certificate in Statistics, 2010

Module 5 : Further probability and inference

1. 2 人のテニス選手 A,B が試合をしている．A のサービスゲームのうち 125 マイル/h より速いサーブの数を X，これらのサーブのうち B がレシーブする数を Y とする．以下の確率モデルを考える．：

$$P(X=0)=0.4,\quad P(X=1)=0.3,\quad P(X=2)=0.2,\quad P(X=3)=0.1$$

$X=x\,(>0)$ が与えられたときの Y の条件つき分布は, パラメータが x, 0.4 の二項分布であり, $P(Y=0\mid X=0)=1$ である．このモデルが正しいことを仮定して，以下の問いに答えよ.

(i) X と Y の同時確率分布を求め，2 元分割表の形で表示せよ.

(ii) Y の周辺確率分布と $E(Y)$ を求めよ.

(iii) Cov(X, Y) を求めよ.

(iv) (i)の同時確率分布表を用いて，この試合における 125 マイル/h より速いサーブのうち B がレシーブしない数の確率分布を求めよ.

2. 確率変数 X と Y の同時確率密度関数

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{4}(x-1)^2-(y-\frac{1}{4}(1+x))^2\right),\quad -\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty$$

を考える.

(i) 積分を用いて，X は平均 1，分散 2 の正規分布に従っていることを示せ.

(ii) 積分を用いて，X の積率母関数が $m_X(t)=\exp(t+t^2)$ であることを示せ.

(iii) (ii)の積率母関数を用いて $E(X^3)$を求めよ.

3. 確率密度関数が

$$f(x)=\beta(1-x)^{\beta-1},\quad 0<x<1\qquad (\beta>0 \text{ は未知のパラメータ})$$

に従う分布からの無作為標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を考える.

(i) β の最尤推定量 $\hat{\beta}$ を求めよ.

(ii) $\hat{\beta}$ の分散の近似値を求め，それを用いて n が大きいときの近似的な β の 95%信頼区間を決定せよ.

(iii) $P(X_i<0.5)=1-0.5^{\beta}$ を示せ.

(iv) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の値はわかっていないが，0.5 未満の X_i の数 Y は既知であると仮定する．Y の分布を述べ，Y に基づく β の尤度関数を書け.

4.　以下の各問に答えよ．

(a) 母集団パラメータのポテンシャル推定量の*バイアス*，*相対的有効性*，*有効性*について定義せよ．異なる推定量でどの推定量を用いるかを決定する際にこれらが役立つのはなぜか，簡潔に説明せよ．

(b) 確率変数 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ は以下の離散型分布からの無作為標本を構成している．

$$P(Y_i=-2)=\frac{1}{2}(1-p)^2,\quad P(Y_i=0)=p(1-p),\quad P(Y_i=1)=p,\quad P(Y_i=2)=\frac{1}{2}(1-p)^2,$$
$$P(Y_i=k)=0\ \ (k\neq -2,0,1,2)$$

ただし，p は未知のパラメータで，$0<p<1$．

(i) p の推定量 $\tilde{p}$ をモーメント法で求めよ．この推定量がもつ不適切な性質を 1 つ説明せよ．

(ii) $E\left(Y_i^2\right)$ を計算し，これから $\tilde{p}$ の分散を求めよ．

(iii) (i)と(ii)で得られた結果などを利用して，$\sum Y_i$ と $\sum Y_i{}^2$ に基づく p^2 の不偏推定量を求めよ．