RSS Higher Certificate in Statistics, 2010

Module 3: Basic Statistical Methods

Solutions

Question 1

(i) 帰無仮説は母集団の平均得点が 2 グループ間で差はないというものである．対立仮説は母集団の平均得点の間に差があるというものである.

共通の分散の推定値は次のように与えられる.

$$s^2 = \left[(6\times 312.90)+(10\times 303.85)\right]/16 = 307.24$$

自由度 16 の t 検定に用いる統計量は次のように与えられる.

$$\frac{61.64-40.71}{s\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{11}}} = 2.470$$

5%有意水準の両側検定では t_{16} から得られる棄却点は 2.120 で, 1%有意水準では 2.921 となる.

したがって観測値 2.470 は 5%水準では有意であるが, 1%水準では有意ではない．全体の得点レベルにおいて 2 グループ間の差はいくらか有意であり，グループ B の方が高い得点をあげているようである.

(ii) どちらの得点の集合も共通の分散を持つ正規分布から無作為に抽出されていると考えてもよいと仮定されている.

2 つの標本の分散値はとても近く，これは母集団の分散を共通とみなすのは適切であるということを示している．標本サイズは小さいため，有意かどうかはあまり確実ではないが，データは正規分布にしたがっているようには見えない．どちらの標本も負の歪度があり，単峰とははっきりと言えない.

ウィルコクソンの順位和検定では，異なった位置母数を持ちつつもどちらの標本も同じ分布にしたがうものとみなしており，位置母数はしばしば中央値とされることが多い. (すなわち，同じ分布の形をしているが, 2 つの標本間で位置が離れているということである.)

(iii) ウィルコクソンの順位和検定は次のような手順となる.

帰無仮説は母集団の位置母数/中央値が 2 つのグループ間で違いがないというものである. 対立仮説は母集団の位置母数/中央値に違いがあるというものである.

18 個のデータをランク付けすると次のようになる:

Data	12	31	34	35	36	39	46	48	55	57	58	61	66	69	70	77	84	85
Ranks	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	A	*A*	*A*	*A*	*B*	*B*	*B*	*B*	*A*	*A*	*B*	*A*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*

小さい方の標本, つまり A の標本の順位和は

$1+2+3+4+9+10=41$

再び 5%有意水準を用いる.

必要な検定は両側検定である. 5%有意水準を用いると, $n_1=7$, $n_2=11$ に対する棄却点は 44 となる. (王立統計学会の試験で用いる統計の表の中で "0.025 水準" と見出しのついているものを用いなければならないことに注意すること.)

したがって計算された標本の統計量の値 41 は 5%水準で有意である. 全体の得点レベルにおいて 2 グループ間の差はいくらか有意であり, グループ B の方が高い得点をあげているようである.

Question 2

(i) パラメーター10とθの2項分布，つまり$\mathrm{B}(10,\theta)$の分布となる.

(ii) 帰無仮説は$\theta = 1/2$．対立仮説は$\theta \neq 1/2$.

(iii) $n = 10$，$\theta = 0.50$，$x = 2$のときの2項分布の累積分布関数の表を用いると，帰無仮説，つまり$X \sim \mathrm{B}(10,1/2)$のもとでは，$P(X \le 2) = 0.0547$となる.

両側検定における対立仮説を扱っているので，観測された値$x = 2$に対応するp-値は$2 \times 0.0547 = 0.1094$で与えられる．これは5%水準では有意ではない（10%水準でも有意でない.）ため，原書として作られたものがタイプAの写本である比率がタイプBの写本で比率と異なるということは有意ではない.

(iv) 2項分布の正規近似を用いると，近似的な分布は平均100θ，分散$100\theta(1-\theta)$の正規分布となる.

(v) 帰無仮説$\theta = 1/2$のもとで，標本数100に含まれるタイプAの写本の数Xは近似的に$X \sim \mathrm{N}(50,25)$で与えられる.

累積確率分関数の値の計算を行うために観測値$x = 39$に対応するものを標準正規化すると（さらに連続補正を行うと），$Z = (39.5-50)/\sqrt{25} = -2.1$となる.

正規分布の累積確率分関数の表にある$z = 2.1$のものを用いると，$\Phi(2.1) = 0.9821$が求まる．したがって,p-値$= 2 \times (1-0.9821) = 0.0358$を用いて両側検定における対立仮説と比較を行う．そうすると結果は比率が異なるという結果を導くのに5%水準で有意であり，タイプBの写本の方がタイプAのものよりも多く作り出されていそうである.

Question 3

(i) 乱数が値 i をとる確率を p_i とすると,

$p_1 = 1/10$ (for $i = 0, 1, 2, ..., 9$)

したがって i の期待頻度は以下のように与えられる.

$E_i = 100p_i = 10$ (for $i = 0, 1, 2, ..., 9$)

(ii) 適切な検定統計量はカイ 2 乗統計量である. これは次の公式を用いて計算され,

$$X^2 = \sum (O_i - E_i)^2 / E_i$$

次の値を与えてくれる.

$$X^2 = \left[0^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2 + 3^2 + 3^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2\right]/10 = 11.2$$

これは自由度 9 の χ^2 分布と比較される.

この分布の 5%点は 16.919 で, 10%点は 14.684 である. したがって 5%水準 (10%水準でも) で判定すると乱数が離散一様分布にしたがっているという仮定を棄却する根拠はない. ゆえに擬似乱数発生プログラムの妥当性について異議を唱えるという根拠はここではない.

(iii) 正規分布の累積確率分布関数の表より得られる確率 p は $p = 2 \times (1 - 0.9772) = 0.0456$ と与えられる.

したがって帰無仮説 $p = 0.0456$, 対立仮説 $p \neq 0.0456$ の両側検定を行うための検定統計量の値は

$$\frac{0.054 - 0.0456}{\sqrt{\dfrac{0.0456(1 - 0.0456)}{1000}}} = 1.273$$

となる. これは $\mathrm{N}(0,1)$ と比較される. 両側検定の 5%有意水準の棄却点は 1.96 であり, 10%有意水準の棄却点は 1.645 である. したがって帰無仮説を棄却する根拠はないため, 擬似乱数発生プログラムが適切なふるまいを行っていないということを示す根拠はここではない.

Question 4

(a) 与えられた分布から n 個の確率標本を繰り返して抽出したとすると，標本統計の標本分布は標本よって異なるような確率分布となる.

与えられたケースでは

$\bar{X}$ の標本分布は平均 μ で分散 σ^2/n の正規分布となる.

S^2 の標本分布は $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ で与えられる.

(b)

(i) μ の 95%信頼区間は $\bar{x} \pm t_{99}(0.025)s/\sqrt{100}$ で与えられる．ここで $t_{99}(0.025)$ は t_{99} 分布の両側 5%点を表しており，ここでは 1.984 をとる. (表では t_{100} 分布に対応している.) [注意．このサイズの標本に対しては棄却点 1.96 の $\mathrm{N}(0,1)$ を用いても理にかなっている.]

すなわち $453.08 \pm (1.984)(5.42)/10 = 453.08 \pm 1.075$ より，区間は (452.00, 454.16) となる.

(ii) 母集団の重量の分散の 95%信頼区間は，値 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ となることを用いることで，χ^2_{99} に基づくことが分かる.

この分布の上側と下側 2.5%点は 73.36 と 128.42 となる.

[注意．試験では自由度 90 と 100 の間の表において行った内挿法は理にかなったものならばすべて可とした.] したがって区間は

$$\left(\frac{99s^2}{128.42},\ \frac{99s^2}{73.36}\right) = \left(\frac{2908.26}{128.42},\ \frac{2908.26}{73.36}\right) = (22.65,\ 39.64)$$

と与えられる.

(iii) s_1^2 をブランド B の標本分散とし，s_2^2 をブランド A の標本分散とする．ブランド B と A の母集団の分散が同じであるという帰無仮説に基づくと，s_1^2/s_2^2 の分布は $F_{19,99}$ となる.

ブランド B の母集団の分散はブランド A のものよりも大きいという対立仮説を調べるための片側検定を行う.

検定統計量 s_1^2/s_2^2 の値は $11.15^2/5.42^2 = 4.23$ となる.

表において内挿法を行った $F_{19,99}$ 分布の上側 0.1%点は (およそ) 2.64 (または 2.63) で与えられる. [注意．試験では表において 18 と 24 の間の値と 90 と 100 の間の値に対し行った内挿法は理にかなったものならばすべて可とした．または,この表の領域である 0.1%の棄却点を観測値が明らかに超えているといった議論を行うこともできる.]

検定統計量はこの値よりも大きい．ブランド B の分散はブランド A の分散よりも大きいという圧倒的な根拠が得られる.