RSS Higher Certificate in Statistics, 2010

Module 2: Probability Models

1. 確率変数 X は二項分布で，確率は確率関数

$$P\left(X=x\right)=\binom{2}{x}p^{x}\left(1-p\right)^{2-x},\ \ x=0,\ 1,\ 2;\ \ 0<p<1$$

で表される．

(i) $E\left(X\right)$，$\mathrm{Var}\left(X\right)$，$P\left(X=2\right)$ をパラメーター p の関数として求めよ．また $P\left(X=0\,|\,X<2\right)$ と $P\left(X=1\,|\,X<2\right)$ をできる限り解答を簡潔にして求めよ．

(ii) $Y=X_1+\ldots+X_{100}$ を 100 個の独立した確率変数の和とし，それぞれの確率変数は X と同一の分布とする．

(a) Y が分布 $\mathrm{B}\left(200,p\right)$ にしたがう理由を説明せよ．

(b) $p=2/3$ のときの $P\left(Y>140\right)$ を適切な近似を用いて求めよ．

(c) $p=0.02$ のときの $P\left(Y>2\right)$ を適切な近似を用いて求めよ．

(d) $p=0.98$ のときの $P\left(Y\le 197\right)$ を適切な近似を用いて求めよ．

2. XYZ 航空は荷物の重量を乗客 1 人当たり 25 kg までとしている．無作為に抽出された乗客の荷物の実際の重量 W kg が，平均 24，分散 1 の正規分布と想定してもよいと搭乗記録によって示されている．

(i) $P(W > 25)$ を求めよ．

(ii) 25 kg を超えた荷物を持った乗客に対しては，その人の荷物が 25 kg を超えた分だけ 1 kg あたり 5 ポンドの課金を行っている．また，小数点以下は全て切り上げる．

(a) C (ポンド) を無作為に抽出した乗客に対する荷物の重量超過の課金とするとき，確率 $P(C=0)$，$P(C=5)$，$P(C=10)$ を求めよ．

(b) $P(C=15)=0.0013$ と近似でき，$P(C>15)$ を無視することができるとするとき，$E(C)$ と $\mathrm{Var}(C)$ を求めよ．

(c) 1 年間に 100,000 人の乗客が独立して XYZ 航空を利用しているとするとして，1 年間に XYZ 航空に支払う荷物の重量超過の費用の総額 C_T の平均と分散を求めよ．C_T が超過する確率が 5%の値について正規近似を用いて求めよ．

(d) (c)において，あなたが計算をするにあたって行った想定について簡潔に述べなさい．

3.　確率変数 T はパラメーター λ の指数分布である．そのため，T の確率密度関数は

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0,\ \lambda > 0$$

となる．

(i)　T の累積密度関数 $F_T(t)$ を求め，$F_T(t)$ のグラフを描きなさい．

(ii)　$P(a < T \le b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$ を示しなさい．

(iii)　$P(0 < T \le 1) = 2P(1 < T \le 2)$ とするとき，λ の値を有効数字 3 ケタで求めなさい．

(iv)　$t > c > 0$ となるような任意の抽出 t，c に対し，$P(T > t \mid T > c)$ を求めなさい．$T > c$ としたときの T の条件付確率密度関数を導出しなさい．同様に $T > c$ としたときの $T - c$ の条件付確率密度関数について求め，結果について簡単にコメントしなさい．

4. 会社 A によって製造されたロープは長さの足りないものが 1 m 当たり λ_A の割合となるポアソン過程にしたがって発生する．そのため，長さ l m のロープにおいて長さが足りないものの数 X はポアソン確率の確率関数で次のように表される．

$$P(X=x)=\frac{\exp(-\lambda_A l)\cdot(\lambda_A l)^x}{x!},\quad x=0,1,2,\ldots;\quad \lambda_A>0\,.$$

(i) (a) 不備のない確率, (b) 不備が 3 つ以上の確率を求めよ．ただし，会社 A は 1000 m の長さのロープを製造しており，$\lambda_A=0.002$ が与えられているとする．

(ii) 会社 B は似たようなロープを製造しており，会社 A で作られたものと見た目の区別がつかない．会社 B で製造されたロープは 1 メートル当たり $\lambda_B=0.003$ の割合となるポアソン過程にしたがって発生する．あるボートには会社 A で製造されたロープ 100 m と会社 B で製造されたロープ 100 m が装備されている. A と B によって供給されたロープの長さは独立であるとするとき，このボートに装備されているロープにおいて, (a) 不備のない確率, (b) ちょうど不備が 1 つある確率を求めよ．

(iii)

(a) ヨットに装備を行う製造業者はロープの 75%を会社 A から, 25%を会社 B から購入している．どちらの会社が供給しているかということと，長さ 2 km のドラム状に巻かれたロープに不備が 7 つあるということは独立に考えることができた．このドラム状に巻かれたロープが会社 A から供給された確率を求めよ．

(b) もし，かわりにこのドラム状に巻かれたロープに 8 つ不備が見つかったとする．このドラム状に巻かれたロープが会社 A から供給された確率を求めよ．この確率を(a)で求めた解答と比較し，コメントせよ．