RSS Higher Certificate in Statistics, 2010

Module 2: Probability Models

Solutions

Question 1

(i)

$$E(X)=2p \qquad \mathrm{Var}(X)=2p(1-p) \qquad P(X=2)=p^2$$

$$P(X=0\mid X<2)=\frac{P\left[(X=0)\cap(X<2)\right]}{P(X<2)}=\frac{P(X=0)}{1-p^2}=\frac{(1-p)^2}{1-p^2}=\frac{1-p}{1+p}$$

$$P(X=1\mid X<2)=\frac{P\left[(X=1)\cap(X<2)\right]}{P(X<2)}=\frac{P(X=1)}{1-p^2}=\frac{2p(1-p)}{1-p^2}=\frac{2p}{1+p}$$

[または，$P(X=1\mid X<2)$ は $1-P(X=0\mid X<2)$ として求めてもよい.]

(ii)

(a) 各 X は成功確率 p の 2 回のベルヌーイ試行において成功した回数である．したがって X は独立であり，p は全ての確率変数で等しいことに注意すると，Y はそのような 200 回の試行で成功した回数であるため，$Y\sim \mathrm{B}(200,p)$ となる.

(b) $p=2/3$ のとき，$Y\sim \mathrm{N}\left(\frac{400}{3},\frac{900}{3}\right)$ と近似できるので,

$$\begin{aligned}P(Y>140)&\approx 1-\Phi\left(\frac{140.5-(400/3)}{20/3}\right)\\&=1-\Phi(1.075)\\&=1-0.859\\&=0.141\end{aligned}$$

[ここで Φ は通常のように標準正規分布の累積確率分布関数を表す.]

(c) $p=0.02$ のとき，$Y\sim \mathrm{Poisson}(4)$ と近似できるので,

$$\begin{aligned}P(Y>2)&\approx 1-P(Y\le 2)\\&=1-0.2381 \quad (\text{表，または}\ 1-e^{-4}\left(1+2+\frac{4^2}{2}\right)\ \text{を用いる. })\\&=0.762\end{aligned}$$

と近似できる.

(d) 今，$p=0.98$ なので，$200-Y\sim \mathrm{B}(200,0.02)\sim \mathrm{Poisson}(4)$ と近似して考える.

$$\begin{aligned}P(Y\le 197)&=P(200-Y\ge 3)\\&\approx 1-P(\mathrm{Poisson}(4)\le 2)\\&=0.762\end{aligned}$$

と((c)より)近似できる.

Question 2

$W \sim \mathrm{N}(24,1)$

(i)

$$P(W>25)=1-\Phi\left(\frac{25-24}{1}\right)$$
$$=1-\Phi(1)$$
$$=1-0.8413$$
$$=0.1587$$

(ii)

(a) $P(C=0)=P(W\le 25)=\Phi(1)=0.8413$

$$P(C=5)=P(25<W\le 26)$$
$$=\Phi\left(\frac{26-24}{1}\right)-\Phi(1)$$
$$=\Phi(2)-\Phi(1)$$
$$=0.9772-0.8413$$
$$=0.1359$$

$$P(C=10)=P(26<W\le 27)$$
$$=\Phi\left(\frac{27-24}{1}\right)-\Phi(2)$$
$$=\Phi(3)-\Phi(2)$$
$$=0.9987-0.9772$$
$$=0.0215$$

(b) 各 C について次のように求まる.

c	0	5	10	15
$P(C=c)$	0.8413	0.1359	0.0215	0.0013
$cP(C=c)$	0	0.6795	0.215	0.0195
$c^2P(C=c)$	0	3.3975	2.15	0.2925

すると，$E(C)=$(“$cP(C=c)$”の行の要素の合計)$=0.914$.

また，$E(C^2)=$(“$c^2P(C=c)$”の行の要素の合計)$=5.84$.

したがって $\mathrm{Var}(C)=5.84-0.914^2=5.005$.

(c) $E(C_T)=91400$，$\mathrm{Var}(C_T)=500500$.

C_T の分布に正規近似を用いる.

この 95%以上の点は $91400+\left(1.6449\times\sqrt{500500}\right)=92564$

(d) 個々に旅行する人々に対し，独立性を想定してもよさそうだが，家族や他のグループに対してはほとんどできなさそうである．彼らは例えば，超過費用を最小化するために荷物の重量を均一化するかもしれない．そうすると，これは C_T の分散に影響しそうだ．

“100,000”は総乗客者数の大まかな数に違いない．

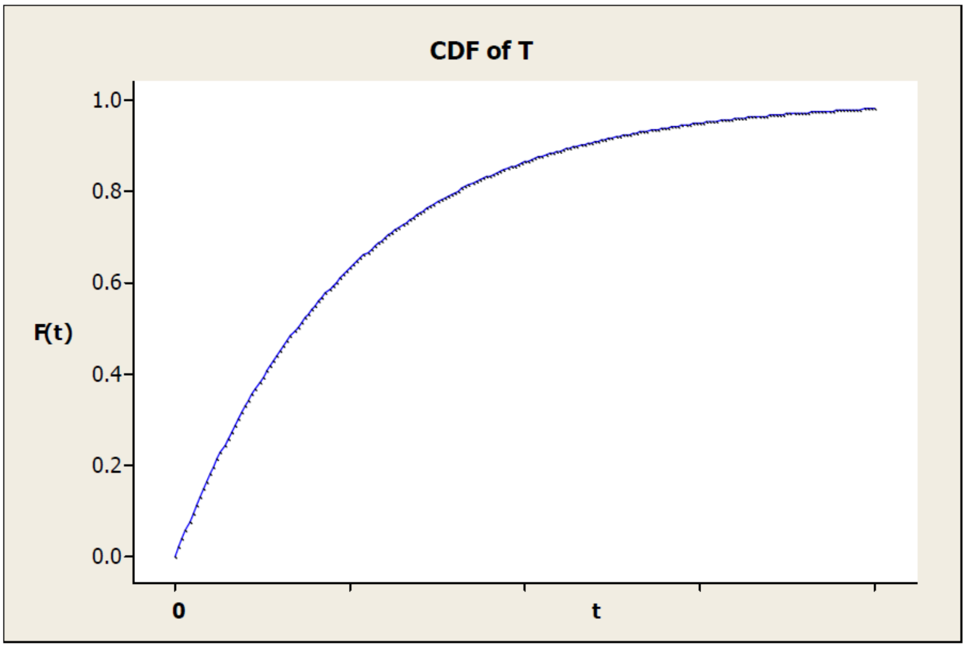
C の分布は明らかに正の歪度があるため，C_T に正規近似を用いるほどたくさんの乗客者数かどうか示す必要がある．与えられた総数 100,000 (たとえ大まかな数であっても) はおそらく十分大きいであろう．

Question 3

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0,\ \lambda > 0$$

(i) 累積分布関数は $t > 0$ に対し，$F_T(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$

[また，$t \le 0$ に対し，$F_T(t) = 0$.]



[注意．グラフは当然なめらかな曲線のはずである．コンピュータでの描画の限界によってそのように見えないかもしれない．]

(ii) $P(a < T \le b) = F_T(b) - F_T(a) = \left(1 - e^{-\lambda b}\right) - \left(1 - e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

(iii) $P(0 < T \le 1) = 1 - e^{-\lambda}$

$P(1 < T \le 2) = e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} = e^{-\lambda}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$

したがって $1 - e^{-\lambda} = 2\left\{e^{-\lambda}\left(1 - e^{-\lambda}\right)\right\}$ となり $e^{\lambda} = 2$ を与えるため，$\lambda = \log 2 = 0.693$ となる．

(iv) $t > c > 0$ に対し，

$$P(T > t \mid T > c) = \frac{P(T > t \ \text{ and } \ T > c)}{P(T > c)} = \frac{P(T > t)}{P(T > c)} = \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda c}} = e^{-\lambda(t-c)}$$

したがって $T > c$ のときの T の条件付確率密度関数は

$$\frac{d}{dt}\left(1 - e^{-\lambda(t-c)}\right) = \lambda e^{-\lambda(t-c)} \qquad (T > c \text{ のとき})$$

確率変数 $T - c$ についても同様の議論を行うと，まず $t > 0$ に対し，

$$P(T - c > t \mid T > c) = \frac{P(T - c > t \ \text{ and } \ T > c)}{P(T > c)} = \frac{P(T > t + c)}{P(T > c)} = \frac{e^{-\lambda(t+c)}}{e^{-\lambda c}} = e^{-\lambda t}.$$

したがって $T > c$ のときの $T - c$ の条件付確率密度関数は，$t > 0$ に対し $\lambda e^{-\lambda t}$ となる．
ゆえに $T > c$ のときの $T - c$ の条件付分布は，任意の $c > 0$ に対し，T の条件無し分布と等しくなる．

Question 4

(i) $X \sim \text{Poisson}(2)$

(a) 表から（またはe^{-2}より） $P(X=0)=0.1353$

(b) $P(X>2)=1-P(X\le 2)$

$=1-0.6767$ （表，または$1-e^{-2}\left(1+2+\dfrac{2^2}{2}\right)$を用いて）

$=0.3233$

(ii) 分かりやすい記号を用いると，$X_A \sim \text{Poisson}(0.2)$，$X_B \sim \text{Poisson}(0.3)$.

(a) P (不備なし) $=P(X_A=0 \text{ and } X_B=0)$

$=P(X_A=0)P(X_B=0)$ （独立性より）

$=e^{-0.2}e^{-0.3}$

$=0.8187\times 0.7408$

$=0.6065$

[<u>他の方法</u>: $X_A+X_B \sim \text{Poisson}(0.5)$，したがって $P(X_A+X_B=0)=e^{-0.5}=0.6065$.]

(b) P (ちょうど不備が 1 つ) $=P\{(X_A=0 \text{ and } X_B=1) \text{ or } (X_B=0 \text{ and } X_A=1)\}$

$=P(X_A=0 \text{ and } X_B=1)+P(X_B=0 \text{ and } X_A=1)$

$=P(X_A=0)P(X_B=1)+P(X_B=0)P(X_A=1)$ （独立性より）

$=e^{-0.2}\times(0.3)e^{-0.3}+e^{-0.3}\times(0.2)e^{-0.2}$

$=0.3033$

[または上述の代わりの方法を用いてもできる.]

(iii)

(a) $$P(A\,|\,\text{不備が7つ})=\frac{P(\text{不備が7つ}\,|\,A)P(A)}{P(\text{不備が7つ})}$$

$$=\frac{P(\text{不備が7つ}\,|\,A)P(A)}{P(\text{不備が7つ}\,|\,A)P(A)+P(\text{不備が7つ}\,|\,B)P(B)}$$

$$=\frac{\dfrac{e^{-4}4^7}{7!}\times 0.75}{\left(\dfrac{e^{-4}4^7}{7!}\times 0.75\right)+\left(\dfrac{e^{-6}6^7}{7!}\times 0.25\right)}$$

$=0.5647$

(b) 不備が 8 つある場合もこの計算を繰り返すと,

$$P(A \mid \text{不備が8つ}) = \frac{P(\text{不備が8つ} \mid A)P(A)}{P(\text{不備が8つ})}$$

$$= \frac{P(\text{不備が8つ} \mid A)P(A)}{P(\text{不備が8つ} \mid A)P(A) + P(\text{不備が8つ} \mid B)P(B)}$$

$$= \frac{\frac{e^{-4}4^8}{8!} \times 0.75}{\left(\frac{e^{-4}4^8}{8!} \times 0.75\right) + \left(\frac{e^{-6}6^8}{8!} \times 0.25\right)}$$

$$= 0.4638$$

この装備には B から供給されたものよりも A から供給されたロープが多く含まれている. しかし, B から供給されたロープは A から供給されたロープに比べて信頼できない. したがって, ロープの不備が次第に多くなるにつれて, A から供給されたロープの確率は 1/2 未満に減る.