2018.11.25

数理 (18) 略解 (v-F.1)

数理 1

[1]　等式 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+n(\overline{X}-\mu)^2$ の両辺の期待値を $n-1$ で割って $\mathrm{E}[S^2]=\sigma^2$ が得られる。

[2]　ガンマ関数の性質を用いた積分計算により $\mathrm{E}[Y]=\int_0^{\infty}yg(y)dy=n-1$ が示される。

$\mathrm{E}[Y^2]=\int_0^{\infty}y^2g(y)dy=(n+1)(n-1)$ より $\mathrm{V}[Y]=2(n-1)$ が得られ，$\mathrm{V}[S^2]=\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$ となる。

[3]　$\mathrm{E}[\sqrt{Y}]=\dfrac{2^{1/2}\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)}$ より $\mathrm{E}[S]=\sigma\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}\times\dfrac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)}$ となる。

[4]　$\mathrm{E}[S]\approx\sigma-\dfrac{\sigma}{4n}$ であることが示され，偏りは $-\dfrac{\sigma}{4n}$ となる。

数理２

[1] $\mathrm{P}(X_i=1)=\dfrac{M}{N}$,　$\mathrm{P}(X_i=1, X_j=1)=\dfrac{M(M-1)}{N(N-1)}$

[2] $\mathrm{E}[X_i]=\dfrac{M}{N}$,　$\mathrm{V}[X_i]=\dfrac{M(N-M)}{N^2}$,　$\mathrm{Cov}[X_i, X_j]=-\dfrac{M(N-M)}{N^2(N-1)}$

[3] $\mathrm{P}(X=x)=\dfrac{{}_M C_x \times {}_{N-M} C_{n-x}}{{}_N C_n}$ となる。これは超幾何分布 $H(n, M, N)$ である。

[4] $\mathrm{E}[X]=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[X_i]=\dfrac{nM}{N}$,　$\mathrm{V}[X]=\dfrac{N-n}{N-1}\times n\times\dfrac{M}{N}\times\left(1-\dfrac{M}{N}\right)$

[5] $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{\mathrm{V}[\hat{N}]}}{N}=\sqrt{\dfrac{(N+K)(N+K-n)}{nNK}}$

数理３

[1]　$\mathrm{E}[X] = n\theta,\ \ \mathrm{V}[X] = n\theta(1-\theta)$

[2]　$\mathrm{P}(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1-(1-\theta)^n$ より $h(x) = \dfrac{{}_nC_x\theta^x(1-\theta)^{n-x}}{1-(1-\theta)^n}\ (x = 1, \ldots, n)$ となる。

[3]　$\mathrm{E}[X \mid X \geq 1] = \dfrac{n\theta}{1-(1-\theta)^n}$，$\mathrm{V}[X \mid X \geq 1] = \dfrac{n\theta(1-\theta)}{1-(1-\theta)^n} - \dfrac{n^2\theta^2(1-\theta)^n}{\{1-(1-\theta)^n\}^2}$

[4]　$\theta = 1 - \sqrt[8]{0.5} \approx 1 - 0.917 = 0.083$

[5]　尤度方程式は $n\hat{\theta} = \bar{y}\{1-(1-\hat{\theta})^n\}$ となるので，最尤推定値はたとえば，$\hat{\theta}^{(0)}$ を適当な初期値として $\hat{\theta}^{(t+1)} = \bar{y}\{1-(1-\hat{\theta}^{(t)})^n\}/n$ なる反復法によって計算する。また，尤度方程式は条件付き期待値を標本平均で置き換えた形であるので，$\hat{\theta}$ はモーメント法に基づく推定値でもある。

<u>数理４</u>

[1]　Y の分布は標準正規分布となる。

[2]　X_{t+1} は正規分布に従い，条件付きの期待値と分散は $\mathrm{E}_{X_{t+1}}[X_{t+1} \mid X_t = x_t] = \rho^2 x_t$，

$\mathrm{V}_{X_{t+1}}[X_{t+1} \mid X_t = x_t] = 1 - \rho^4$ となる。

[3]　数学的帰納法で，$t = k$ のとき成り立つとして，$t = k + 1$ の場合を示せばよい。$t \to \infty$ とすると，条件付き分布は標準正規分布に近づく。

数理５

[1]　確率密度関数はそれぞれ $f_1(y)=3(1-y)^2$，$f_3(y)=3y^2$ となり，期待値はそれぞれ

$\mathrm{E}[Y_1]=\dfrac{1}{4}$，$\mathrm{E}[Y_3]=\dfrac{3}{4}$ となる。

[2]　$f_2(y)=6y(1-y)$。$\mathrm{P}(Y_2\le 0.5)=0.5$ である。

[3]　$\mathrm{E}[Z]=\dfrac{1}{2}$，$\mathrm{V}[Z]=\dfrac{1}{20}$ である。