2017.11.26

統計検定1級（統計数理）

解答と解説（数理）　略解

数理1

[1]　$E[\overline{X}]=\mu$，$V[\overline{X}]=\dfrac{\sigma^2}{n}$　であり，不偏性は

$$E[T^2]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[(X_i-\mu)^2]=\frac{1}{n}\times n\sigma^2=\sigma^2,$$

$$E[S^2]=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n(\overline{X}-\mu)^2\right]=\frac{1}{n-1}\times(n-1)\sigma^2=\sigma^2$$

より示される。

[2]　$\beta_1(\overline{X})=\dfrac{\beta_1}{\sqrt{n}}$

[3]　$\beta_2(\overline{X})=\dfrac{\beta_2}{n}$

[4]　n が大きくなると，$\overline{X}$ の分布の歪度も尖度も0に近づき，中心極限定理により $\overline{X}$ の分布は正規分布に近づく。

[5]　対数尤度関数の微分により，σ^2 の最尤推定値は $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ となる。μ が未知のときは，σ^2 の最尤推定量は $\tilde{\sigma}^2=\dfrac{n-1}{n}S^2$ となる。

数理２

[1]　尤度関数の微分により θ の最尤推定量は $\hat{\theta}=X_{\max}$ で与えられる。

[2]　$E[X]=\int_0^\theta x\cdot\frac{1}{\theta}dx=\frac{\theta}{2}$ であるので，$E[\theta']=E[2\bar{X}]=\theta$ となる。

[3]　$X_{\max}$ の確率密度関数は $g(x;\theta)=\frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}$ となる。また，$E[X_{\max}]=\frac{n}{n+1}\theta$ より不偏性が示される。

[4]　$V[\theta']=\frac{\theta^2}{3n}$，$V[\theta'']=\frac{\theta^2}{n(n+2)}$ となるので，θ'' は θ' より有効である。

数理３

[1]　$B(n,p)$ の確率関数で，$\lambda=np$ すなわち $p=\lambda/n$ とすると，

$$p(x)={}_nC_x p^x(1-p)^{n-x}=\frac{1}{x!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\lambda^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

であるので，ここで $n\to\infty$ として $p(x)\to\dfrac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ を得る。

[2]　X のモーメント母関数は

$$M_X(t)=E[e^{tX}]=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!}=\exp[\lambda(e^t-1)]$$

となる。期待値は $E[X]=M'_X(t)|_{t=0}=\lambda$ と求められ，$E[X^2]=M''_X(t)|_{t=0}=\lambda(1+\lambda)$ より $V[X]=E[X^2]-(E[X])^2=\lambda$ となる。

[3]　Y はパラメータ $\lambda_1+\lambda_2$ のポアソン分布に従う。

[4]　$Z=(X-\lambda)/\sqrt{\lambda}$ のモーメント母関数は $M_Z(t)=e^{-\sqrt{\lambda}t}\exp[\lambda(e^{t/\sqrt{\lambda}}-1)]$ であり，キュムラント母関数 $\psi_Z(t)=\log M_Z(t)$ に対し，$\psi_Z(t)=\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{3!}\dfrac{t^3}{\sqrt{\lambda}}+o\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\to\dfrac{1}{2}t^2\quad(\lambda\to\infty)$ より Z の分布は $\lambda\to\infty$ のとき，標準正規分布に収束することが示される。

数理４

[1]　Z は $N(a, k^2+1)$ に従う。

[2]　X と Z の相関係数は $R[X,Z]=\dfrac{k}{\sqrt{k^2+1}}$ となる。

[3]　Z の確率分布は $N(a+kx, 1)$ となる。

[4]　X の条件付き分布は $N\left(\dfrac{k}{k^2+1}(z-a), \dfrac{1}{k^2+1}\right)$ である。

数理５

[1]　確率変数 V の確率密度関数 $f(v)$ は，変換 $V=Z^2$ では $\dfrac{dz}{dv}=\dfrac{1}{2\sqrt{v}}$ であるので，

$$f(v)=2\varphi(\sqrt{v})\frac{dz}{dv}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{v}}\exp[-v/2]$$

となる。

[2]　X と Y の同時確率密度関数 $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{xy}}\exp[-(x+y)/2]$ で変数変換 $s=x/y$，$u=y$ を行うことにより，S の確率密度関数は $g(s)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{s}}\dfrac{1}{1+s}$ となる。

[3]　上問 [2] の結果で $s=\tan^2\theta$ と置くと $g(s)ds=\dfrac{2}{\pi}d\theta$ となる。$t=\dfrac{x-y}{2\sqrt{xy}}=-\dfrac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ より，T の確率要素は $h(t)dt=\dfrac{1}{\pi(1+t^2)}dt$ となり，題意が示される。