2016年 RSS/JSS試験（Higher Certificate）

HIGHER CERTIFICATE IN STATISTICS, 2016

モジュール5：確率と統計的推測の発展的内容

制限時間: 90分

4問中3問を選択の上解答のこと.

各問は合計20点である．小問の配点は括弧の中に記されている.

グラフ用紙と統計数値表は配布する.

解答にあたっては電卓を使用してよい.
ただし，一般財団法人統計質保証推進協会による「受験要領」に
記された範囲で使用すること.

数学記号 log は **e** を底とする自然対数を表す.
その他の底をもつ対数は，例えば $\log_{10}$ のように底を明示する.

また，$\binom{n}{r}$ は ${}_nC_r$ と同じ意味とする.

.

問題用紙は8頁からなり，**それぞれの頁は片面にのみ印刷されている**.
この表紙が1頁目である.
第1問は2頁目から始まる.

問題は全部で4問である.

1. あるボードゲームを開始するにあたって，プレーヤーは歪んだサイコロを6の目が出るまで投げる．確率変数Xを最初の6の目が出るまで（最初の6の目が出たそのときを含む）のサイコロを投げた回数とする． Xの確率関数は

$$P(X=x)=\theta(1-\theta)^{x-1} \qquad x=1,2,3,\ldots$$

で与えられる．ただしθはその歪んだサイコロで6の目が出る確率とする．

(i) $P(X>k)=(1-\theta)^k \quad (k=1,2,3,\ldots)$ を示せ.

(4)

ゲームを始めようとする200人のプレーヤーがいた．このうち24人は1回目で6の目が出て，48人は2回目で最初の6の目が出た．残りのプレーヤーは6の目が出るまで3回以上を要した.

(ii) これらのデータから尤度は

$$L(\theta)=\theta^{72}(1-\theta)^{304}$$

と書き表されることを示し，θの最尤推定量$\hat{\theta}$を求めよ.

(9)

(iii) θの95% 近似信頼区間を求めよ.

(7)

2. (a) 確率変数 X のモーメント母関数 (mgf) を $M_X(t)$ とし，$R(t) = \log M_X(t)$ とする．

(i) $M_X(t)$ の 2 階までの導関数で $R'(t)$ と $R''(t)$ を表せ．

(2)

(ii) $R'(0) = E(X)$ と $R''(0) = Var(X)$を示せ．

(4)

(b) 確率変数 Y はポアソン分布に従い，その確率関数 (pmf) を

$$P(Y = y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!}, \quad y = 0, 1, 2, \dots,$$

ただし$\lambda > 0$ とする．

(i) Y の mgf が $M_Y(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$ であることを示せ．

(3)

(ii) mgf を用いて$E(Y) = \lambda$ を示せ．また $E(Y^2) = \lambda + \lambda^2$ と $E(Y^3) = \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3$を用いて$E\left[\left(Y - E(Y)\right)^3\right] = \lambda$ を示せ．

(5)

(iii) $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ は互いに独立にいずれも上記で与えられた確率関数をもつポアソン分布に従う確率変数とする．これらの mgf を用いて和 $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ の分布を求めよ．解答において用いた mgf の性質をそれぞれ述べよ．

(6)

3. あるサイコロゲームで，袋の中に赤いサイコロが 4 つ，白いサイコロが 3 つ，青いサイコロが 2 つ入っている．非復元抽出で無作為に 3 つのサイコロを取り出し，その中の白いサイコロの数を確率変数 X とし，青いサイコロの数を確率変数 Y とする．X と Y の同時確率関数は以下の表で与えられている．

		X			
		0	1	2	3
Y	0	$4k$	$18k$	$12k$	k
	1	$12k$	$24k$	$6k$	0
	2	$4k$	$3k$	0	0

(i) k の値を求めよ．

(2)

(ii) このサイコロゲームのルールから $P(X=2, Y=2)=0$ である理由を説明せよ．また $P(X=2, Y=0)$ の値を確かめよ．

(5)

(iii) $Y=0$ が与えられたときの X の条件付確率関数を求めよ．また $E(X\,|\,Y=0)=\frac{9}{7}$ であることを示し，$\mathrm{Var}(X\,|\,Y=0)$ を求めよ．

(6)

(iv) $\mathrm{Cov}(X, Y)=-\frac{1}{6}$ であることを示し，これが負の値を取ると考えられる理由を簡潔に説明せよ．

(7)

4. $X_1, X_2, ..., X_n$ は分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ からの無作為標本とする．

(i) 以下を示せ．

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{(n-1)\sigma^2}{n}$$

ただし $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ，$n > 1$である．この結果を用いてσ^2 の不偏推定量を求めよ．

[$E(\bar{X}) = \mu$と$\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ であることは証明なしに用いてよい．]

(9)

$S_a^2 = a\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ の形の σ^2 の一般的な推定量が提案されている．ただしaは任意の定数である．

(ii) S_a^2 のバイアスは$(an - a - 1)\,\sigma^2$ であることを示せ．

(4)

(ii) 推定量の平均二乗誤差 (MSE) は 推定量の分散にバイアスの二乗を足したもので定義される．以下の

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right) = 2(n-1)\sigma^4,$$

が与えられたとき，S_a^2 の MSE を求め，その MSE を最小にするaの値が$\frac{1}{n+1}$であることを示せ．

(7)

BLANK PAGE

BLANK PAGE

BLANK PAGE