(2019年10月29日版)

統計検定3級新出題範囲対応教材

1. これは2020年4月から変更される出題範囲に対応した統計検定3級の教材です。

2. 本教材は3級の全範囲を網羅しているのではなく，

   統計検定3級対応　データの分析（東京図書）

   を補うもので，新出題範囲「相関と回帰」,「確率分布」,「統計的な推測」について簡潔な説明がなされています。

3. 付表「標準正規分布の上側確率」を最終ページに掲載しています。

4. 本教材は必要に応じて改訂されます。

相関と回帰

相関係数

　相関係数は2変数間の直線的な関係の強さを測る尺度であり，-1から1の値をとる。しかし，相関係数の絶対値が大きいからといって，必ずしも2変数間に何らかの関係があるわけではない。たとえば，外れ値の存在によって大きな値になることがある。また，相関係数の絶対値が小さいからといって，全く関係がないわけでもない。たとえば，2次曲線的な関係が見られる場合の相関係数は0に近い値になることもある。相関係数を解釈するときには単に値だけを見るのではなく，散布図も考慮に入れて解釈することが重要である。（「データの分析」10.2節参照）

因果関係

　2変数間に強い相関関係があることが**因果関係**を示すことにはならない。明らかな因果関係には，2変数間に原因と結果を示す明確な背景があるが，一般に，因果は明らかではないため，次に述べる実験研究を行う。

【例】自動車の速度と停止距離の間には，速度を出せば出すほど，停止距離が長くなる傾向がある。これは，運動エネルギーなどの物理的背景により示すことができる因果関係である。

因果関係の研究

　因果関係の有無を調べるために，対象者に何らかの介入を施す実験研究を行う。

【例】あるドリンク剤の効果を調べたいなら， 無作為割り付けなどの方法を用いて，対象者をドリンク剤を飲むグループ（Aグループ）と飲まないグループ（Bグループ）に分け，実験期間後に両グループを比較する。Aグループの方がよりよい結果を示したなら，そのドリンクには効果があり体によいと考える。そのドリンク剤を飲んでいる人のみを対象に効果を調べても意味がない。なぜならば，その人たちは体調が悪いのでそのドリンク剤を飲んでいるかもしれず，飲んでいる人ほど体調がすぐれない人が多く，効果がないという結果を導くこともあり得るからである。

擬相関（見かけ上の相関）

　2変数x, yにおいて，ある変数zが両方の変数に影響を与えているため，xとyの間に相関がみられることがあるが，これを**擬相関（見かけ上の相関）**という。

【例】2015 年の都道府県別の一般病院年間入院患者数と一般病院数の相関係数は 0.95 で，強い相関がある（図 1）。この場合，都道府県の人口の影響により，入院患者数と病院数の相関係数を大きくしているのではないかと考えることができる。そこで，人口 10 万人当たりの一般病院年間入院患者数と一般病院数を調べると，その相関係数は 0.70 となる（図 2)。つまり，相関係数の値が小さくなり，人口の影響の可能性が見て取れる。

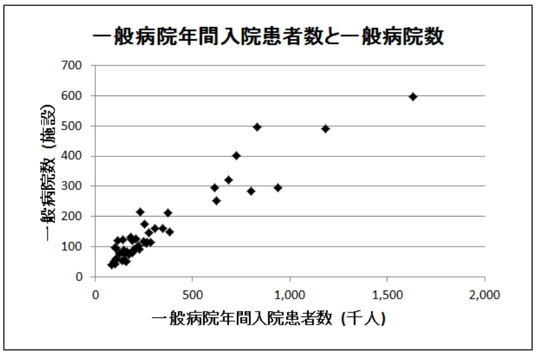


図 1: 一般病院年間入院患者数と一般病院数の散布図

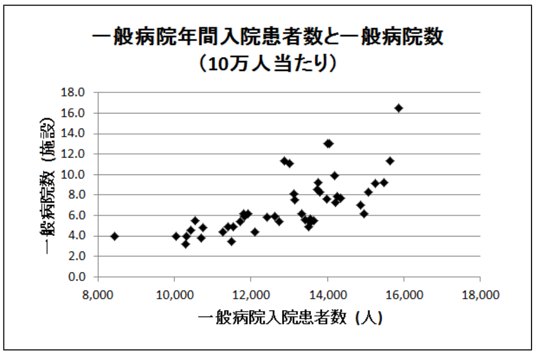


図 2: 10 万人当たりの一般病院年間入院患者数と一般病院数の散布図

出典：社会生活統計指標-都道府県の指標- 2018

回帰直線

変数 x によって変数 y を**予測**することを**回帰分析**という。特に，直線 $y = \alpha + \beta x$ により予測するとき，この直線を **回帰直線**といい，α と β を**回帰係数**という。回帰係数 α，β の推定値 $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ をデータから導出する。回帰直線の式を用いて x より y の予測値 $\hat{y}$ を求める。なお，本教材では，推定値であることを表す場合，ˆ（ハット）をつけて示す。

最小二乗法

回帰直線の回帰係数 α と β を推定する方法の 1 つに**最小二乗法**がある。

最小二乗法による回帰係数 α と β の推定方法を説明する。i 番目の観測値の組 $(x_i, y_i)\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ に対して，予測値は $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i$ となる。y に関する観測値 y_i とその予測値 $\hat{y}_i$ との差 $y_i - \hat{y}_i$ を**残差**という。すべての観測値の残差の平方和（**残差平方和**）

$$S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = (y_1 - \hat{y}_1)^2 + (y_2 - \hat{y}_2)^2 + \cdots + (y_n - \hat{y}_n)^2$$

を考える。この式を $S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = (y_1 - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_1)^2 + (y_2 - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_2)^2 + \cdots + (y_n - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_n)^2$ と書き換えると，$S(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ は $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ を含む式で書けることがわかる。平方和であることから $S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \geqq 0$ であり，残差の絶対値が大きいほど $S(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ は大きな値になるため，この値

を最小にするように回帰係数を決めればよいと考える。具体的には，回帰係数の推定値 $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ は，**正規方程式**と呼ばれる式の解として次のように表すことができる。

$$\hat{\beta} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}\left(= r_{xy}\frac{S_y}{S_x}\right),\ \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$$

ここで，$\bar{x}$と S_xは変数 x の平均値および標準偏差，$\bar{y}$と S_yは変数 y の平均値および標準偏差，S_{xy}と r_{xy}は x と y の共分散および相関係数 である。

【例】あるバネに 10 種類のおもりをつるして，バネの長さを測定したところ，表 1 のような結果が得られた。図 3 はこのデータの散布図である。おもりの重さ x[g] に対するバネの長さ y[mm] を予測するため回帰係数の推定値を求めると，$\hat{\beta} = 401/73 = 5.5$，$\hat{\alpha} = 206 - 5.5\times\ 19 = 101.5$ となり，推定された回帰直線 $y = 101.5 + 5.5x$ が導かれる。これより，おもりの重さが 20g のとき，バネの長さは 211.5mm と予測される。

表 1　おもりの重さとバネの長さ

回数	おもりの重さ x[g]	バネの長さ y[mm]
1	6	119
2	8	145
3	12	175
4	14	191
5	18	204
6	20	209
7	24	244
8	26	233
9	30	272
10	32	268

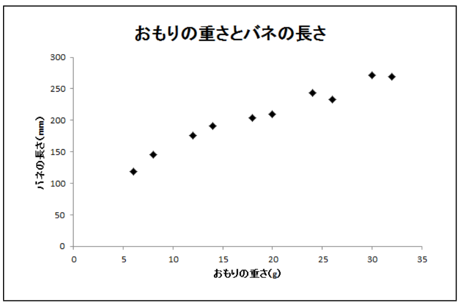


図 3　おもりの重さとバネの長さの散布図

ある値 x が，データの存在する範囲から大きく離れている場合，直線的な関係が成立しない可能性があるので，単純に回帰直線を用いて予測すべきではない。つまり，本例において，おもりの重さが 100g のときのバネの長さは予測すべきではない。また，一般に，被

説明変数 y から説明変数 x を予測してはいけない。

確率分布

確率変数

確率変数 X は起こりうる事象に対して数値 x を割り当て，その数値 x が生じる確率を $P(X=x)$ と表し，$p(x)$ と書く。

確率分布

確率変数 X が取り得る値 x に対する確率の状態（分布）を「確率変数 X が従う確率分布」という。確率変数 X が取り得るすべての値 x に対する確率を加えると 1 になる。

【例】表と裏が 1/2 ずつの同じ確率で出るコインを投げ，表が出るとき $X=1$，裏が出るとき $X=0$ とする確率変数 X を考える。このとき，その確率分布は表 2 のようになる。

表 2　コイン投げの確率分布

x	0	1	合計
$p(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

【例】 1 から 6 の目が同じ確率で出るサイコロ（以後，ゆがみのないサイコロという）投げについて考える。各目の出る確率は 1/6 である。出る目を確率変数 X とするとき，その確率分布は表 3 のようになる。

表 3　サイコロ投げの確率分布

x	1	2	3	4	5	6	合計
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

離散型確率変数

確率変数の取り得る値が離散的（とびとび）である確率変数を離散型確率変数という。離散型確率変数では，取り得る値に対して確率が対応する。つまり，確率変数 X の取り得る値を $x_1, x_2, \cdots, x_k$ とするとき，確率を $P(X=x_i)=p(x_i)=p_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$ と表す。

【例】上のコイン投げやサイコロ投げは離散型確率変数の例である。ゆがみのないコイン投げは $P(X=x)=1/2$（$x=0,1$），ゆがみのないサイコロ投げは $P(X=x)=1/6$（$x=1,2,3,4,5,6$）と表わせる。

連続型確率変数

確率変数の取り得る値が連続的な値（実数値）である確率変数を**連続型確率変数**という。連続型確率変数では，取り得る区間に対して確率を考える。つまり，連続型確率変数 X に対して，それが区間 $[a,b]$ 内の値をとる確率を $P(a \leqq X \leqq b)$ と表す。

【例】高校 1 年生の男子の中から 1 人を選んだとき，その男子の体重が 60kg 以上 80kg 以下，つまり，区間 $[60,80]$ に入っている確率は，$P(60 \leqq X \leqq 80) = 0.6$ などと表す。

本文中では，誤解が生じない限り離散型，連続型を明記せず，単に確率変数とする。

離散型確率変数の平均と分散

平均 μ と分散 σ^2 は次のように定義される。

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i, \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 p_i$$

平均 μ は，確率変数 X が取り得る値 x_i とその確率 $P(X = x_i) = p_i$ をかけ，すべてについて合計する。分散 σ^2 は，確率変数 X が取り得る値 x_i の平均 μ からの偏差の 2 乗 $(x_i - \mu)^2$ を考え，それらに確率 $P(X = x_i) = p_i$ をかけ，すべてについて合計する。また，標準偏差 $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ は分散の正の平方根である。

【例】ゆがみのないサイコロ投げの平均と分散を求める。次のような表を用いるとわかりやすいので利用するとよい。表 4 の 1 行目と 2 行目が表 3 の確率分布である。3 行目はこれらを掛け合わせたものであり，最後の列が合計で，平均は $\mu = 21/6 = 7/2$ となる。

表 4　サイコロ投げの平均を求める表

x	1	2	3	4	5	6	合計
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1
積	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{21}{6}$

分散については表 5 を用いて説明する。1 行目と 3 行目は表 4 と同じである。2 行目は平均 $\mu = 7/2$ を用いた $(x_i - \mu)^2$ の値である。4 行目は，2 行目と 3 行目の値を掛け合わせたものである。最後の列が合計で，分散は $\sigma^2 = 70/24 = 35/12$ となる。また，標準偏差は $\sigma = \sqrt{35/12}$ と求められる。

連続型確率変数の平均と分散

連続型確率変数の平均，分散，標準偏差を求めるには積分の知識が必要となる。統計検定 3 級では，これらの値を計算により求めることはなく，性質として知っていればよい。

表 5　サイコロ投げの平均と分散を求める表

x	1	2	3	4	5	6	合計
$(x-\mu)^2$	$\frac{25}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{25}{4}$	
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1
積	$\frac{25}{24}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{70}{24}$

二項分布

試行結果が 2 種類の場合，一方を「成功」，他方を「失敗」と表現し，それぞれを「1」と「0」の数値によって表す。このような試行結果の例として，コインの表裏，くじ引きの当たりはずれなどがある。一般に，成功 $(X=1)$ 確率を $p\,(0 \leqq p \leqq 1)$ とすると，失敗 $(X=0)$ 確率は $1-p$ である。成功確率 p が一定の反復試行を n 回行ったとき，成功回数 X を確率変数とする離散型確率分布を**二項分布**（Binomial 分布）という。

成功確率 p が一定の場合，n 回の反復試行中，成功が x 回（失敗が $n-x$ 回）である確率は次のように求められる（二項分布の**確率関数**という）。

$$P(X=x) = {}_n\mathrm{C}_x p^x (1-p)^{n-x} \quad (x=0,1,2,\cdots,n)$$

ここで，${}_n\mathrm{C}_x$ は，n 回中 x 回成功する「場合の数」である。また，成功が x 回，失敗が $n-x$ 回の特定の試行が生じる確率は $p^x(1-p)^{n-x}$ である。この場合，${}_n\mathrm{C}_x$ 個の試行の確率は等しいので，これを ${}_n\mathrm{C}_x$ と掛け合わせることによって，上の確率が求まる。

二項分布の性質

二項分布は，成功確率 p と反復試行回数 n によって形状が決まるので，記号 $B(n,p)$ と表し，確率変数 X は二項分布 $B(n,p)$ に従うという。二項分布 $B(n,p)$ に従う確率変数 X の平均 $\mu=np$，分散 $\sigma^2=np(1-p)$ ，標準偏差 $\sigma=\sqrt{np(1-p)}$ となる。

【例】図 4 は，二項分布 $B(10,0.4)$ の概形である。このとき，確率変数 X の平均は 4 で，分散は 2.4，標準偏差は $\sqrt{2.4} \fallingdotseq 1.55$ となる。図 4 において，4 のところに山があるのが見て取れる。

正規分布

統計学で用いる最も重要な連続型確率分布が**正規分布**（ガウス分布，Normal 分布）である。連続型確率変数 X が従う正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ を特徴づける関数（正規分布の**確率密度関数**という）は，μ と σ^2 により定まり，次のように表せる。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

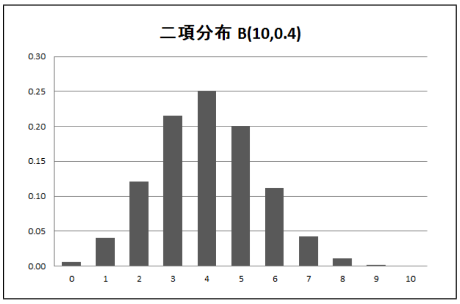


図 4　二項分布 $B(10, 0.4)$

ここで，e は自然対数の底と呼ばれる無理数である。統計検定 3 級では，正規分布の式は覚える必要はなく，特徴を理解しておくだけでよい。

正規分布の形状

図 5 は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の概形である。正規分布の特徴を列挙すると次のようになる。

・平均は μ，分散は σ^2 である。

・山が一つ（単峰）で，平均 μ に対して左右対称であり，$x = \mu$ で最大値をとる。

・左右にすそを引くなだらかなベルカーブ（ヨーロッパのベルの形）である。

・曲線と横軸（漸近線となる）で囲まれた部分の面積は 1 である。

・X が $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ に入る確率は約 68 %（約 2/3），$(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ に入る確率は約 95 %，$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ に入る確率は約 99.7 %である。

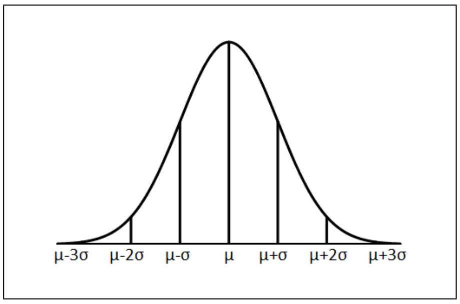


図 5　正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$

正規分布の性質

正規分布には次のような性質がある。

(1) 確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき，X の 1 次関数 $Y = aX + b$ は正規分布 $N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ に従う。

(2) (1) の特殊な場合として $a = 1/\sigma, b = -\mu/\sigma$ のとき，つまり，確率変数 X を $Z = (X - \mu)/\sigma$ と変換すると，Z は平均 0，分散 1 の正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

(3) 確率変数 X が二項分布 $B(n,p)$ に従い，n が大きいとき，確率変数 X が従う分布は正規分布 $N(np,np(1-p))$ で近似できる。

標準正規分布 $N(0,1)$ の確率

$N(0,1)$ を標準正規分布という。本教材の最終ページに図 6 の u から上側の確率，つまり，標準正規分布の上側確率 $Q(u)=P(Z \geqq u)$ の値の数表を付表（標準正規分布の上側確率）として載せている。なお，標準正規分布に従う確率変数は Z で表す。

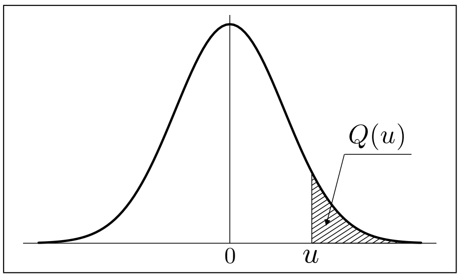


図 6　標準正規分布

【例】上側確率 $Q(u)$ の値から標準正規分布の下側，上側，内側，外側などの確率を求めることができる。以下にいくつかの計算例を示す。

・$Q(1.96)=P(Z \geqq 1.96)$ を求める。付表の左側の数値から 1.9 を探す。次に横に 7 つ（上側の 0.06 のところまで）進める。その値は 0.0250 であるから $P(Z \geqq 1.96)=0.0250$ である。

・$P(Z \leqq 1.96)$ を求める。全体の面積が 1 であることから，$1-P(Z \geqq 1.96)=1-0.0250=0.9750$ となる。

・$P(Z \leqq -1.96)$ を求める。正規分布は左右対称なので，$P(Z \leqq -1.96)=P(Z \geqq 1.96)=0.0250$ となる。

・$P(|Z| \leqq 1.96)$ を求める。正規分布は左右対称なので，$P(|Z| \leqq 1.96)=1-2\times P(Z \geqq 1.96)=1-2\times 0.0250=0.0950$ となる。

【例】$P(Z \geqq z)=0.10$ になる z を求める。付表中の 0.500 から始まる数値の中で 0.10 に一番近いところを探す。0.1003 が一番近いのでこの値の左端の数値 1.2 と上側の数値 0.08 を足して 1.28 と求める。つまり，$P(Z \geqq 1.28) \fallingdotseq 0.10$ となる。

一般の正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ の確率

確率変数 X が一般の正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとき，標準化と標準正規分布 $N(0,1)$ の表

を用いて，X がある区間に入る確率を求めることができる。

【例】確率変数 X が正規分布 $N(50, 10^2)$ に従う場合，$P(X \geqq 65)$ は，

$$P(X \geqq 65) = P(\frac{X-50}{10} \geqq \frac{65-50}{10}) = P(Z \geqq 1.5) = 0.0668$$

と求めることができる。ここで，左辺は $N(50, 10^2)$ の場合の確率で，次の式変形が標準化を意味する。以降は，標準正規分布 $N(0,1)$ の場合の確率であり，付表を用いて値を求めている。

二項分布の正規近似

標本の大きさ n が大きいとき，二項分布 $B(n,p)$ に従う確率変数 X は，正規分布 $N(np, np(1-p))$ で近似できる（正規分布の性質 (3) ）。

【例】図 7 は，$p = 0.2, n = 50$ の場合の二項分布の確率関数（縦線）と，それに対応する正規分布 $N(10, 8)$ の確率密度関数（曲線）を重ねて描いたものである。これら 2 つはおおよそ一致していることが見て取れる。

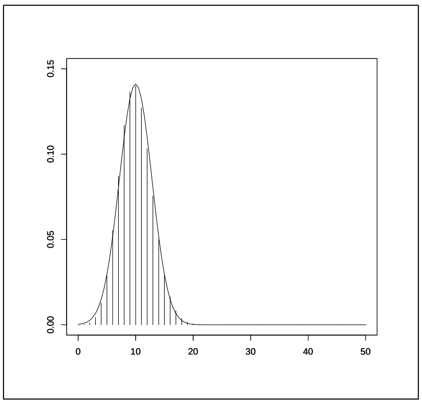


図 7　二項分布の正規近似

【例】確率変数 X が二項分布 $B(700, 0.4)$ に従う場合の $P(X \geqq 300)$ を求める。二項分布 $B(700, 0.4)$ の平均は $\mu = 700 \times 0.4 = 280$，分散は $\sigma^2 = 700 \times 0.4 \times 0.6 = 168$ であるので，X の分布を正規分布 $N(280, 168)$ で近似し，次のような式変形を行い，標準正規分布 $N(0,1)$ の確率を用いて求める。

$$P(X \geqq 300) \fallingdotseq P(Z \geqq \frac{300-280}{\sqrt{168}}) = P(Z \geqq 1.54) = 0.0618$$

ここで，左辺は二項分布における確率，次の式変形が正規分布近似と標準化を意味する。以降は，標準正規分布 $N(0,1)$ の付表を用いて値を求めている。

$P(X \geqq 300)$ は計算機を用いて計算すると約 0.067 である。この近似をさらによくするには連続修正を用いるが，統計検定 3 級では触れない。

統計的な推測

母平均，母比率と標本平均，標本比率

母集団の興味ある特性の平均や比率の値をそれぞれ**母平均**，**母比率**と表現し，観測で得た標本から計算した推定値を**標本平均**，**標本比率**と表現し区別する。これらの推定値は，母集団の値と完全に一致することはほとんどなく誤差がある。

【例】ゆがみのないサイコロ投げの場合，p.6 で示した理論的な平均が母平均で，値は 7/2=3.5 である。このサイコロを 10 回投げ，3，2，1，4，5，3，2，6，6，4 の目が出たとする。これが大きさ 10 の標本で，(3+2+1+4+5+3+2+6+6+4)/10=3.6 が標本平均である。このサイコロ投げにおいて，3 で割り切れる数（3 または 6）が出る理論的な比率を考えた場合，母比率の値は 1/3 である。上の 10 回の結果より，3 または 6 は 4 回出ているため，標本比率は 0.4 となる。

標本分布

繰り返し大きさ n の標本を無作為抽出し，そのたびに標本平均を計算したとすれば，それらの値は母平均の値のまわりに分布する。同様に，繰り返し大きさ n の標本を無作為抽出し，そのたびに標本比率を計算したとすれば，それらの値は母比率の値のまわりに分布する。標本平均や標本比率などの標本から推定された量に関する分布を**標本分布**という。

【例】一般の標本分布について説明する前に，ゆがみのないサイコロを 2 回投げた場合の平均を考える。つまり，1 回目と 2 回目に出た目の確率変数をそれぞれ X_1, X_2 とし，平均 $\bar{X} = (X_1 + X_2)/2$ を考える。この $\bar{X}$ も確率変数となり，表 6 のような確率分布に従う。表 6 からわかるように，$\bar{X}$ の確率分布は 3.5 を中心とした山形である。

表 6　$\bar{X}$ の確率分布

$\bar{x}$	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	合計
$p(\bar{x})$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

$\bar{X} = (X_1 + X_2)/2$ は，母集団から大きさ 2 の標本として X_1, X_2 を抽出した場合の標本平均と考えることができる。つまり，表 6 の確率分布は標本平均 $\bar{X}$ の標本分布となる。

ここではサイコロを 2 回投げた場合について示したが，投げる回数を多くして $\bar{X}$ を考えると，その確率分布は正規分布で近似できることが知られている。このことを次に示す。

標本平均 $\bar{X}$ の標本分布

母平均 μ，母分散 σ^2 をもつ母集団から，大きさ n の標本として $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を無作為抽出するとき，これらは n 個の確率変数であり，それらの標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ もまた確率変数である。標本平均 $\bar{X}$ が従う分布を**標本平均 $\bar{X}$ の標本分布**といい，次のような性質がある。

【性質】母平均 μ，母分散 σ^2 を持つ母集団から n 個の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を互いに独立に無作為抽出する。n が大きいとき，標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ に近似的に従う。これより，n が大きくなるほど標準偏差が小さくなり，分布の山が高くなることがわかる。さらに，$\bar{X}$ を標準化した確率変数 Z を考えると，n が大きいとき，$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に近似的に従う。

【例】母平均 150，母分散 100 を持つ母集団から大きさ n=25 の標本 $X_1, X_2, \cdots, X_{25}$ を互いに独立に無作為抽出する。このとき，標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N(150, 4)$ に近似的に従う。

標本比率 $\hat{p}$ の標本分布

母集団における興味ある事象Ａの出現比率 p について考える。母集団の大きさが大きい場合，非復元抽出であっても，n 回の取り出しでＡが起こる回数 X は近似的に二項分布 $B(n,p)$ に従うと考えてよい。母比率 p の推定に標本比率 $\hat{p} = X/n$ を用いるとき，標本比率 $\hat{p}$ も確率変数である。$\hat{p}$ が従う分布を**標本比率 $\hat{p}$ の標本分布**という。

【性質】二項分布 $B(n,p)$ に従う確率変数 X の平均と分散は，それぞれ np，$np(1-p)$ である。したがって，標本比率 $\hat{p}$ の平均と分散は，それぞれ p，$\frac{p(1-p)}{n}$ である。また，n が大きいとき，二項分布は正規分布で近似できることから，標本比率 $\hat{p}$ は正規分布 $N(p, \frac{p(1-p)}{n})$ に近似的に従う。さらに，$\hat{p}$ を標準化した確率変数 $Z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に近似的に従う。

区間推定

母平均や母比率を 1 つの値で推定することを点推定という。これに対し，ある程度の幅を持たせて推定することを**区間推定**という。

【例】あるテレビ番組を 900 世帯中 180 世帯が観ていたとき，母視聴率 p の推定値を $\hat{p} = 180/900 = 0.2$ と推定するのが点推定で，$0.17 \leqq p \leqq 0.23$ のように区間を示して推定する

のが区間推定である。

母平均 μ の信頼区間

母平均 μ，母分散 σ^2 をもつ母集団から n 個の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が互いに独立に無作為抽出された場合，n が大きいとき，上述したように，$\bar{X}$ を標準化した $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に近似的に従う。また，標準正規分布の表から $P(|Z| \leqq 1.96) = 0.95$ である。Z に上式を代入すると，$P(|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}| \leqq 1.96) = 0.95$ となる。(　) 内を書き直すと，

$$\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

となる。この 0.95 または 95 ％を**信頼度（信頼係数）**といい，この区間を母平均 μ に対する信頼度 95 ％の**信頼区間**という。信頼度は 95 ％だけでなく，90 ％や 99 ％など様々考えることができる。たとえば，90 ％の場合には $P(|Z| \leqq 1.645) = 0.90$ を考えることで同様に求めることができる。上式から，信頼区間は「母集団の大きさに関係なく，標本の大きさ n で決まる」ことがわかる。さらに，$\sqrt{n}$ が分母にあることから，標本の大きさを k^2 倍にすると区間の幅は $1/k$ 倍になることがわかる。

【例】母平均 μ，母分散 10^2 の母集団から大きさ n=25 の標本を無作為抽出したところ，標本平均 $\bar{X} = 152$ となった。このとき，母平均 μ の信頼度 95 ％の信頼区間は $152 - 1.96\frac{10}{\sqrt{25}} \leqq \mu \leqq 152 + 1.96\frac{10}{\sqrt{25}}$，つまり，$148.08 \leqq \mu \leqq 155.92$ となる。また，標本の大きさを 4 倍にし $n = 100$ にすると，信頼区間は $150.04 \leqq \mu \leqq 153.96$ となり区間の幅は 1/2 になる。

母比率 p の信頼区間

母比率 p の区間推定の場合にも，先に示した $\hat{p}$ を標準化した $Z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$ を用いるが，標本の大きさ n が十分大きいことを用いて，分母の p に $\hat{p}$ を代入する。さらに，$P(|\frac{(\hat{p}-p)}{\sqrt{(\hat{p}(1-\hat{p})/n)}}| \leqq 1.96) = 0.95$ の (　) 内を書き直すと，母比率 p に対する信頼度 95 ％の信頼区間は

$$\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leqq p \leqq \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

となる。母比率の信頼区間も，標本の大きさを k^2 倍にすると区間の幅は $1/k$ 倍になることがわかる。

【例】先の視聴率調査について，上式に $n = 900$ と $\hat{p} = 0.2$ を代入すると，信頼度 95 ％の信頼区間は $0.2 - 0.026 \leqq p \leqq 0.2 + 0.026$，つまり，$0.174 \leqq p \leqq 0.226$ となる。

信頼区間の意味

信頼度 95 ％の信頼区間とは，母平均や母比率がこの区間に入る確率が 95 ％ということではない。標本の大きさが n のとき，このような方法で信頼度 95 ％の信頼区間を複数求めた場合，母平均や母比率がそれらの範囲に入っている割合が 95 ％程度ということである。

【例】ゆがみのないサイコロ投げの場合，母平均は $\mu = 7/2 = 3.5$，母分散は $\sigma^2 = 35/12$ である。このサイコロを 25 回投げた場合，母平均 μ の信頼度 95 ％の信頼区間は $\bar{X} - 1.96 \times \sqrt{\frac{7}{60}} \leqq \mu \leqq \bar{X} + 1.96 \times \sqrt{\frac{7}{60}}$ となる。図 8 は，25 回のサイコロ投げの実験を 20 回繰り返して標本平均 $\bar{X}$ を求め，それより計算される 20 個の信頼度 95 ％の信頼区間を示したものである。図 8 において，16 番目の区間だけが母平均 $\mu = 7/2 = 3.5$ を含んでいない。このように，20 個程度の信頼区間を作成した場合，19 個程度（95 ％程度）は真値を含んでおり，それが信頼度 95 ％という意味である。

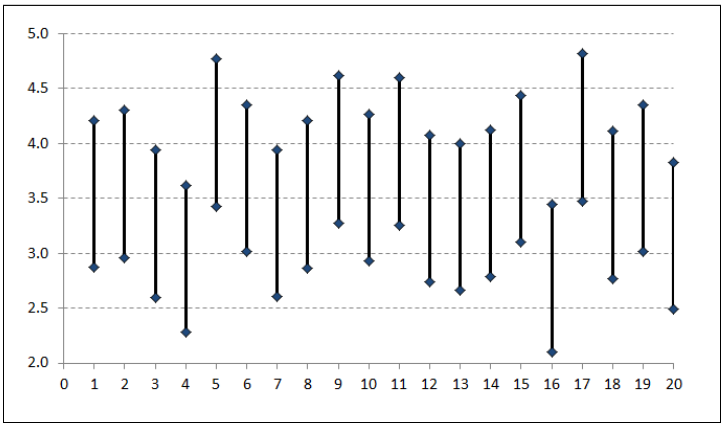


図 8　サイコロ投げの場合の母平均に対する信頼度 95 ％の信頼区間

仮説検定の考え方

コイン投げを 10 回行って 9 回表が出たとする。このとき,「このコインは表が出やすい」と主張したいであろう。この場合，後述するような帰無仮説と対立仮説を立て，めったに起こらないことを確率で示し，その主張が成り立つか否かを確かめる方法が**仮説検定**である。

次に，このコイン投げについて説明する。$p = 0.5$ ならば，10 回コイン投げを行ったとき，表が出る回数 X は二項分布 $B(10, 0.5)$ に従う。表 7 は $B(10, 0.5)$ の確率分布である。

表 7　二項分布 $B(10, 0.5)$ の確率分布

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	合計
$p(x)$	0.001	0.010	0.044	0.117	0.205	0.246	0.205	0.117	0.044	0.010	0.001	1.00

表 7 から，表が多数回出る確率に関して，次のことがわかる。

・10 回表が出る可能性は，0.001 ＝ 0.1 ％
・9 回以上表が出る可能性は，0.001 ＋ 0.010 ＝ 0.011 ＝ 1.1 ％
・8 回以上表が出る可能性は，0.001 ＋ 0.010 ＋ 0.044 ＝ 0.055 ＝ 5.5 ％

「$p = 0.5$ ならば，10 回コイン投げをして 9 回以上表が出るようなことは確率 0.011（1.1 ％）以下でしか起こらない」ので,「このコインは表が出やすい」と考えるのが自然であり，そのような主張が成り立つと判断する。本例を用いて，以下に仮説検定の手順を示す。

仮説検定の手順

(1) 帰無仮説，対立仮説を立てる

仮説には**帰無仮説** H_0 と**対立仮説** H_1 がある。「このコインは表が出やすい」という主張は,「本来，コインの表の出る確率 p は 0.5 であるにもかかわらず，このコインの表の出る確率 p は 0.5 より大きいのではないか」ということなので，次のように帰無仮説と対立仮説を立てる。

$$H_0\colon p = 0.5, \quad H_1\colon p > 0.5$$

このように，帰無仮説の片側だけに興味があり，対立仮説を「$H_1\colon p > 0.5$」または「$H_1 : p < 0.5$」とおいて仮説検定を行うことを**片側検定**という。

上と異なり,「このコインはゆがんでいるのではないか」という主張を考える。この場合,「本来，コインの表の出る確率 p は 0.5 であるにもかかわらず，どちらかに偏り，表または裏が出やすいのではないか」という主張なので，次のように帰無仮説と対立仮説を立てる。

$$H_0\colon p = 0.5, \quad H_1\colon p \neq 0.5$$

このように，帰無仮説の両側に興味があり，対立仮説を「$H_1\colon p \neq 0.5$」とおいて仮説検定を行うことを**両側検定**という。以下では，まず片側検定について説明を行う。

(2) 有意水準を決める

「帰無仮説が真であるという仮定の下(もと)（以降，帰無仮説の下という）で滅多に起こらないと判断する基準」になる確率の値を決める。これを検定の**有意水準**といい α で表わす。有意水準としては，0.1，0.05，0.01 を用いることが多い。「有意水準 0.05」は「有意水準 5 ％」ともいわれる。コイン投げの例では有意水準を $\alpha = 0.05$ として考えることにする。

(3) 帰無仮説の下で棄却域を決める

帰無仮説の下で,「滅多に起こらないこと」を定める限界値を計算する。帰無仮説が真なら，表 9 より $X \geqq 8$ の確率は 0.055 で有意水準 0.05 より大きい。$X \geqq 9$ の確率は 0.011 で 0.05 より小さい。このことから，$X \geqq 9$ ならば「帰無仮説を**棄却する**」といい,「対立仮説

が真，すなわちこのコインは表が出やすい」と判断する。このように，帰無仮説を棄却する範囲（$X \geqq 9$）を**棄却域**という。

(4) 判断をする

この例の場合，実際に起こった結果は $X = 9$ であった。つまり，結果が棄却域に入っているので，有意水準 $\alpha = 0.05$ で帰無仮説を棄却し,「このコインは表が出やすい」と判断する。もし 7 回表が出たなら，帰無仮説を棄却せず,「このコインは表が出やすいとはいえない」と判断する。

次に，有意水準 $\alpha = 0.05$ の両側検定の場合について，上の手順 (3)，(4) を簡単に述べる。片側検定では $X \geqq 9$ の確率が 0.011 なので，$X \geqq 9$ を棄却域とした。一方，X の値が小さすぎる場合については，$X \leqq 1$ の確率も 0.011 である。これらを合計しても 0.022 となり，この値は 0.05 より小さいので，両側検定の場合には，$X \leqq 1$ と $X \geqq 9$ を棄却域にすればよい。また，実際に起こったことが $X = 9$ であったなら，その結果は棄却域に入っているので，有意水準 $\alpha = 0.05$ で帰無仮説を棄却し,「このコインは表または裏が出やすい」と判断する。

有意水準の意味

有意水準は，帰無仮説が真であるにもかかわらず，それを棄却してしまう確率（誤った判断の可能性）の上限と考えられる。このコイン投げの場合，100 度同じ実験を行ったなら，表が 9 回以上出ることが 1 度程度はありうる。つまり,「有意水準 $\alpha = 0.05$ で帰無仮説を棄却する」とは,「帰無仮説が真のときに判断を誤る確率を 0.05 まで認め，帰無仮説を棄却するか否かを決める」という考えになる。

【例】コイン投げの実験でコインを 100 回投げた場合の片側検定（$H_0\colon p = 0.5, H_1\colon p > 0.5$）を考える。帰無仮説の下で，100 回投げて表が出る回数 X は二項分布 $B(100, 0.5)$ に従う。さらに，正規分布 $N(50, 5^2)$ で近似できることを考え，X を標準化した $Z = \frac{X-50}{5}$ が近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うことを利用する。有意水準 $\alpha = 0.05$ の片側検定の場合，$P(Z \geqq 1.645) = 0.05$ を用いて棄却域を求める。すなわち，

$$P(Z \geqq 1.645) \fallingdotseq P(\frac{X-50}{5} \geqq 1.645) = P(X \geqq 1.645 \times\ 5 + 50) = P(X \geqq 58.225)$$

より，有意水準 $\alpha = 0.05$ の棄却域は $X \geqq 59$ とすればよい。もし，100 回中 60 回表が出たならば，$X = 60$ は棄却域に入るので，有意水準 $\alpha = 0.05$ で帰無仮説は棄却される。つまり，表が出やすいコインと判断される。また，60 回表が出たことに注目して，そのような

ことが起こる確率を計算することもできる。その確率は次のように

$$P(X \geqq 60) = P(Z \geqq \frac{60-50}{5}) = P(Z \geqq 2.0) \fallingdotseq 0.0228$$

となり，0.05 より小さな値なので，有意水準 $\alpha = 0.05$ で帰無仮説は棄却される。この計算結果から，どの程度の確率でこのようなことが起こったのかがわかる。

【例】上の例を両側検定（H_0: $p = 0.5, H_1$: $p \neq 0.5$）の場合について考える。有意水準 $\alpha = 0.05$ の両側検定の場合，$P(|Z| \geqq 1.96) = 0.05$ を用いて棄却域を求める。すなわち，

$$\begin{aligned} P(|Z| \geqq 1.96) &\fallingdotseq P(|\tfrac{X-50}{5}| \geqq 1.96) = P(|X-50| \geqq 1.96 \times \ 5) \\ &= P(X \leqq 40.2 \text{ または } 59.8 \leqq X) \end{aligned}$$

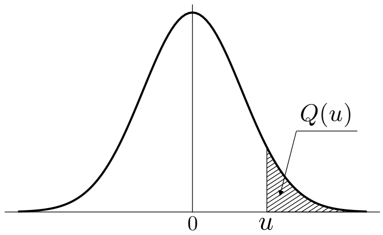
より，有意水準 $\alpha = 0.05$ の棄却域は，$X \leqq 40$ と $X \geqq 60$ とすればよい。もし，100 回中 40 回表が出たならば，$X = 40$ は棄却域に入るので，有意水準 $\alpha = 0.05$ で帰無仮説は棄却される。つまり，ゆがんだコインと判断される。

仮説検定の注意点

仮説検定の判断において重要なことがある。それは,「帰無仮説を棄却しない」ということが「帰無仮説が真である」ことを意味している訳ではないということである。「帰無仮説を棄却しない」ということは,「帰無仮説を棄却するにたる根拠を示すことはできなかった」ということである。一方，帰無仮説を棄却できたなら，有意水準で示した「誤りの確率」内ではあるが，対立仮説で示した主張を認めることになる。

仮説検定の手順において，有意水準をどの程度に設定するかは，実験前に決めておかなくてはならない。有意水準の値によって，帰無仮説が棄却されたり，されなかったりするからである。

付表　標準正規分布の上側確率



u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

$u = 0.00 \sim 3.99$ に対する，正規分布の上側確率 $Q(u)$ を与える。
例：$u = 1.96$ に対しては，左の見出し 1.9 と上の見出し .06 との交差点で，$Q(u) = 0.0250$ と読む。表にない u に対しては適宜補間すること。