



# 統計検定

Japan Statistical Society Certificate

## 1 級 統計数理

2024 年 11 月 17 日

### 【注意事項】

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は、24 ページあります。
- 3 問題 5 問から 3 問を選択して、解答しなさい。
- 4 試験時間は 90 分です。
- 5 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答冊子の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 6 解答冊子・マークシートの A 面には次の項目があるので、それぞれの指示に従い記入あるいは確認しなさい。項目の内容に誤りがある場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
  - ① マークシートの氏名  
氏名を記入しなさい。
  - ② マークシートの検定種別と受験番号  
受験する検定種別と受験番号を確認しなさい。
  - ③ マークシートの Web 合格発表  
Web 合格発表について、希望の有無をマークしなさい。
  - ④ 解答冊子表紙の左上に受験番号を記入し、マーク欄の該当する数字を塗りつぶしなさい。
  - ⑤ 問ごと（問 1，問 2，...）に解答のページを改めなさい。  
なお、解答する問の順番（問 3，問 1，問 5 など）は問いません。
  - ⑥ 各ページの先頭に受験番号と問題番号を書きなさい。（この冊子裏面の記入例参照）  
解答冊子には、最終的な解答だけでなくそれに至る過程も記しなさい。最終的な解答が正しくないときにも点が与えられることがあります。
  - ⑦ 解答冊子の表紙の問題番号欄の選択した問題番号を ○ で囲みなさい（得点欄には何も書かないこと）。（この冊子裏面の記入例参照）
- 7 15 ページ以降に付表を掲載しています。必要に応じて利用しなさい。
- 8 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 9 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

（冊子裏面につづく）



---

# 統計数理

問1 確率変数  $Y_1, \dots, Y_n$  に対し、定数項のない線形回帰モデル

$$Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

を想定する。ここで、説明変数  $x_1, \dots, x_n$  は正の定数とし、 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  は互いに独立に期待値 0、分散  $\sigma^2$  の正規分布  $N(0, \sigma^2)$  に従う確率変数である。また、 $\beta$  は未知パラメータで、 $\sigma^2$  は既知の定数とする。このとき、以下の各問に答えよ。なお、正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  の確率密度関数は

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

である。

- [1]  $Y_1, \dots, Y_n$  の実現値をそれぞれ  $y_1, \dots, y_n$  としたとき、それらに基づく  $\beta$  の対数尤度関数  $l(\beta)$  を求めよ。
- [2]  $\beta$  の最尤推定量  $\hat{\beta}_{ML}$  を求め、それが  $\beta$  の不偏推定量であることを示せ。
- [3]  $\beta$  のフィッシャー情報量  $I_n(\beta)$  およびクラメール・ラオの下限を求めよ。
- [4]  $\beta$  の別の推定量として

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}$$

を考える。 $\tilde{\beta}$  の期待値と分散を求めよ。

- [5] 帰無仮説  $H_0: \beta = 0$ 、対立仮説  $H_1: \beta > 0$  の有意水準  $\alpha$  の片側検定について、最尤推定量  $\hat{\beta}_{ML}$  を用いた検定と、上問 [4] の  $\tilde{\beta}$  を用いた検定の検出力の大小を比較せよ。



問 2 確率変数の組  $(X, Y)$  は原点を中心とした半径  $\theta$  の円の周および内部  $S(\theta) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \theta^2\}$  で一様分布に従うとする。すなわち,  $(X, Y)$  の同時確率密度関数は

$$h(x, y) = \begin{cases} 1/(\pi\theta^2) & ((x, y) \in S(\theta)) \\ 0 & ((x, y) \notin S(\theta)) \end{cases}$$

であり,  $\theta (> 0)$  は未知パラメータである。点  $(X, Y)$  の原点からの距離を表す確率変数を  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$  と置くととき, 以下の各問に答えよ。

[1]  $R$  の累積分布関数  $F(r) = P(R \leq r)$  および確率密度関数  $f(r)$  を求めよ。

[2]  $R$  の期待値  $E[R]$  および分散  $V[R]$  を求めよ。

互いに独立に  $S(\theta)$  で一様分布に従う  $n$  組の確率変数を  $(X_i, Y_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) とし, それらの原点からの距離を  $R_i$  とする。

[3]  $R_1, \dots, R_n$  の最大値を  $R_{(n)}$  とする。 $R_{(n)}$  の累積分布関数  $G(r)$  および確率密度関数  $g(r)$  を求めよ。ただし,  $0 \leq r \leq \theta$  とする。

[4]  $R_1, \dots, R_n$  による  $\theta$  の最尤推定量  $\hat{\theta}_{ML}$  を求めよ。

[5] 上問 [4] で求めた最尤推定量  $\hat{\theta}_{ML}$  に対し,  $\hat{\theta}_U = a\hat{\theta}_{ML} + b$  が  $\theta$  の不偏推定量となるための定数  $a$  と  $b$  を導出し, その際の  $\hat{\theta}_U$  の分散を求めよ。



---

問3  $n$  個の確率変数  $X_1, \dots, X_n$  ( $n \geq 2$ ) は、互いに独立に、確率  $\theta$  で 1 の値を取り、確率  $1 - \theta$  で 0 の値を取るベルヌーイ分布に従うとする。ただし、 $\theta$  は  $(0, 1)$  に値を取る未知パラメータである。 $X_1, \dots, X_n$  の和を  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  としたとき、以下の各問に答えよ。

[1]  $S_n$  の従う分布は何か。また、 $S_n$  の期待値  $E[S_n]$  と分散  $V[S_n]$  を求めよ。

[2]  $S_n$  は  $\theta$  に対する十分統計量であることを示し、 $\theta$  の最尤推定量  $\hat{\theta}_{ML}$  を求めよ。

[3]  $T_n = \alpha_n S_n + \beta_n$  と置く。ここで、 $\alpha_n$  と  $\beta_n$  は  $n$  に依存して定まる定数である。 $T_n$  の  $\theta$  に対する平均二乗誤差 (mean squared error : MSE)

$$\text{MSE}[T_n] = E[(T_n - \theta)^2]$$

を  $\theta$  によらず一定にしたい。このような  $T_n$  の中で  $\text{MSE}[T_n]$  を最小にする  $\alpha_n$  と  $\beta_n$  を求めよ。また、そのときの  $\text{MSE}[T_n]$  はいくらか。

[4] パラメータ  $\theta$  の推定において、 $V[\hat{\theta}_{ML}]$  と上問 [3] で求めた最小の  $\text{MSE}[T_n]$  を比較し、 $\text{MSE}[T_n]$  のほうが  $V[\hat{\theta}_{ML}]$  よりも小さくなる  $\theta$  の範囲を求めよ。その結果を元に、 $\hat{\theta}_{ML}$  と  $T_n$  の優劣を論ぜよ。





---

問4 非負の値を取る確率変数  $X$  に関して、以下の各問に答えよ。なお、ガンマ関数の性質  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$  ( $\alpha > 0$ ) は用いてもよい。

- [1]  $X$  の5つの実現値 2, 3, 2, 1, 6 に対する経験分布関数のグラフを描け。
- [2] 上問 [1] の5つの実現値の標本平均は、上問 [1] で描いたグラフのある領域の面積に対応する。その領域を、境界を明確にして分かりやすく図示せよ。
- [3]  $X$  は連続型で、その累積分布関数を  $F(x)$ 、確率密度関数を  $f(x)$  としたとき、 $X$  の期待値  $E[X] = \int_0^\infty xf(x)dx$  は

$$E[X] = \int_0^\infty \{1 - F(x)\}dx$$

と表されることを示せ。

- [4] パラメータ  $\lambda (> 0)$  の指数分布 (確率密度関数:  $g(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  ( $x \geq 0$ )) の  $\lambda$  がパラメータ  $\alpha (> 0)$ ,  $\beta (> 0)$  のガンマ分布 (確率密度関数:  $h(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}$ ) に従うときの  $X$  の確率密度関数を  $f(x) = \int_0^\infty g(x)h(\lambda)d\lambda$  とする。 $f(x)$  を求めよ。
- [5] 確率変数  $X$  は、上問 [4] の確率密度関数  $f(x)$  を持つ分布に従うとする。このとき、期待値  $E[X]$  が存在するパラメータ  $\alpha$  の範囲を示せ。また、 $\alpha$  がその範囲にあるとき、 $E[X]$  を求めよ。



---

問5 確率変数  $X_1, X_2, X_3$  は互いに独立に区間  $(-0.5, 0.5)$  上の一様分布に従うとし、それらの順序統計量を  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)}$  とする。 $\theta$  を未知パラメータとし、確率変数  $Y_{(1)}, Y_{(2)}, Y_{(3)}$  を  $Y_{(i)} = X_{(i)} + \theta$  ( $i = 1, 2, 3$ ) と定義するとき、以下の各問に答えよ。

[1] 順序統計量  $X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}$  のそれぞれの周辺確率密度関数  $f_1(x_1), f_2(x_2), f_3(x_3)$  を求めよ。また、それらを用いて各期待値  $E[X_{(1)}], E[X_{(2)}], E[X_{(3)}]$  を求めよ。

[2]  $X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}$  の同時確率密度関数  $f(x_1, x_2, x_3)$  を求めよ。

定数  $c$  に対して、順序統計量  $Y_{(1)}, Y_{(2)}, Y_{(3)}$  に基づく  $\theta$  の推定量を

$$\hat{\theta}_c = cY_{(1)} + (1 - 2c)Y_{(2)} + cY_{(3)}$$

とする。

[3]  $\hat{\theta}_c$  は  $c$  の値によらず  $\theta$  の不偏推定量であることを示せ。

[4] 変数の組  $\{Y_{(1)}, Y_{(3)}\}$  は  $\theta$  に対する十分統計量であることを示せ。

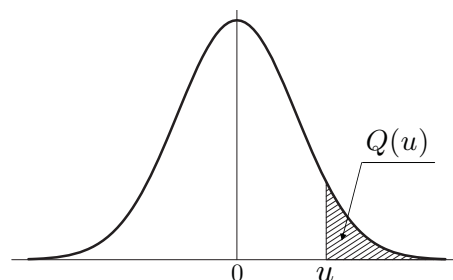
[5] 条件付き期待値  $E[Y_{(2)}|Y_{(1)}, Y_{(3)}]$  を求めよ。また、その結果および上問 [4] を用いて  $\hat{\theta}_c$  の分散  $V[\hat{\theta}_c]$  が最小となる  $c$  を求めよ。





# 付 表

付表 1. 標準正規分布の上側確率



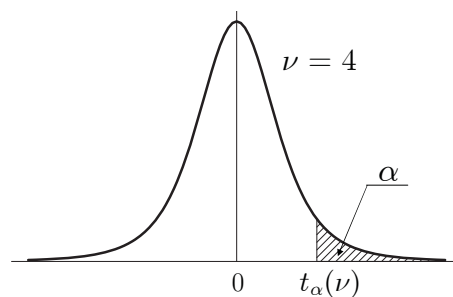
| $u$ | .00    | .01    | .02    | .03    | .04    | .05    | .06    | .07    | .08    | .09    |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.4960 | 0.4920 | 0.4880 | 0.4840 | 0.4801 | 0.4761 | 0.4721 | 0.4681 | 0.4641 |
| 0.1 | 0.4602 | 0.4562 | 0.4522 | 0.4483 | 0.4443 | 0.4404 | 0.4364 | 0.4325 | 0.4286 | 0.4247 |
| 0.2 | 0.4207 | 0.4168 | 0.4129 | 0.4090 | 0.4052 | 0.4013 | 0.3974 | 0.3936 | 0.3897 | 0.3859 |
| 0.3 | 0.3821 | 0.3783 | 0.3745 | 0.3707 | 0.3669 | 0.3632 | 0.3594 | 0.3557 | 0.3520 | 0.3483 |
| 0.4 | 0.3446 | 0.3409 | 0.3372 | 0.3336 | 0.3300 | 0.3264 | 0.3228 | 0.3192 | 0.3156 | 0.3121 |
| 0.5 | 0.3085 | 0.3050 | 0.3015 | 0.2981 | 0.2946 | 0.2912 | 0.2877 | 0.2843 | 0.2810 | 0.2776 |
| 0.6 | 0.2743 | 0.2709 | 0.2676 | 0.2643 | 0.2611 | 0.2578 | 0.2546 | 0.2514 | 0.2483 | 0.2451 |
| 0.7 | 0.2420 | 0.2389 | 0.2358 | 0.2327 | 0.2296 | 0.2266 | 0.2236 | 0.2206 | 0.2177 | 0.2148 |
| 0.8 | 0.2119 | 0.2090 | 0.2061 | 0.2033 | 0.2005 | 0.1977 | 0.1949 | 0.1922 | 0.1894 | 0.1867 |
| 0.9 | 0.1841 | 0.1814 | 0.1788 | 0.1762 | 0.1736 | 0.1711 | 0.1685 | 0.1660 | 0.1635 | 0.1611 |
| 1.0 | 0.1587 | 0.1562 | 0.1539 | 0.1515 | 0.1492 | 0.1469 | 0.1446 | 0.1423 | 0.1401 | 0.1379 |
| 1.1 | 0.1357 | 0.1335 | 0.1314 | 0.1292 | 0.1271 | 0.1251 | 0.1230 | 0.1210 | 0.1190 | 0.1170 |
| 1.2 | 0.1151 | 0.1131 | 0.1112 | 0.1093 | 0.1075 | 0.1056 | 0.1038 | 0.1020 | 0.1003 | 0.0985 |
| 1.3 | 0.0968 | 0.0951 | 0.0934 | 0.0918 | 0.0901 | 0.0885 | 0.0869 | 0.0853 | 0.0838 | 0.0823 |
| 1.4 | 0.0808 | 0.0793 | 0.0778 | 0.0764 | 0.0749 | 0.0735 | 0.0721 | 0.0708 | 0.0694 | 0.0681 |
| 1.5 | 0.0668 | 0.0655 | 0.0643 | 0.0630 | 0.0618 | 0.0606 | 0.0594 | 0.0582 | 0.0571 | 0.0559 |
| 1.6 | 0.0548 | 0.0537 | 0.0526 | 0.0516 | 0.0505 | 0.0495 | 0.0485 | 0.0475 | 0.0465 | 0.0455 |
| 1.7 | 0.0446 | 0.0436 | 0.0427 | 0.0418 | 0.0409 | 0.0401 | 0.0392 | 0.0384 | 0.0375 | 0.0367 |
| 1.8 | 0.0359 | 0.0351 | 0.0344 | 0.0336 | 0.0329 | 0.0322 | 0.0314 | 0.0307 | 0.0301 | 0.0294 |
| 1.9 | 0.0287 | 0.0281 | 0.0274 | 0.0268 | 0.0262 | 0.0256 | 0.0250 | 0.0244 | 0.0239 | 0.0233 |
| 2.0 | 0.0228 | 0.0222 | 0.0217 | 0.0212 | 0.0207 | 0.0202 | 0.0197 | 0.0192 | 0.0188 | 0.0183 |
| 2.1 | 0.0179 | 0.0174 | 0.0170 | 0.0166 | 0.0162 | 0.0158 | 0.0154 | 0.0150 | 0.0146 | 0.0143 |
| 2.2 | 0.0139 | 0.0136 | 0.0132 | 0.0129 | 0.0125 | 0.0122 | 0.0119 | 0.0116 | 0.0113 | 0.0110 |
| 2.3 | 0.0107 | 0.0104 | 0.0102 | 0.0099 | 0.0096 | 0.0094 | 0.0091 | 0.0089 | 0.0087 | 0.0084 |
| 2.4 | 0.0082 | 0.0080 | 0.0078 | 0.0075 | 0.0073 | 0.0071 | 0.0069 | 0.0068 | 0.0066 | 0.0064 |
| 2.5 | 0.0062 | 0.0060 | 0.0059 | 0.0057 | 0.0055 | 0.0054 | 0.0052 | 0.0051 | 0.0049 | 0.0048 |
| 2.6 | 0.0047 | 0.0045 | 0.0044 | 0.0043 | 0.0041 | 0.0040 | 0.0039 | 0.0038 | 0.0037 | 0.0036 |
| 2.7 | 0.0035 | 0.0034 | 0.0033 | 0.0032 | 0.0031 | 0.0030 | 0.0029 | 0.0028 | 0.0027 | 0.0026 |
| 2.8 | 0.0026 | 0.0025 | 0.0024 | 0.0023 | 0.0023 | 0.0022 | 0.0021 | 0.0021 | 0.0020 | 0.0019 |
| 2.9 | 0.0019 | 0.0018 | 0.0018 | 0.0017 | 0.0016 | 0.0016 | 0.0015 | 0.0015 | 0.0014 | 0.0014 |
| 3.0 | 0.0013 | 0.0013 | 0.0013 | 0.0012 | 0.0012 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0010 | 0.0010 |
| 3.1 | 0.0010 | 0.0009 | 0.0009 | 0.0009 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0007 | 0.0007 |
| 3.2 | 0.0007 | 0.0007 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0005 |
| 3.3 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0003 |
| 3.4 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0002 |
| 3.5 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 |
| 3.6 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 |
| 3.7 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 |
| 3.8 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 |
| 3.9 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

$u = 0.00 \sim 3.99$  に対する、正規分布の上側確率  $Q(u)$  を与える。

例： $u = 1.96$  に対しては、左の見出し 1.9 と上の見出し .06 との交差点で、 $Q(u) = .0250$  と読む。表にない  $u$  に対しては適宜補間すること。



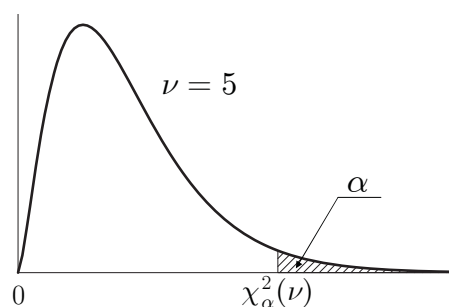
付表 2.  $t$  分布のパーセント点



| $\nu$    | $\alpha$ |       |        |        |        |
|----------|----------|-------|--------|--------|--------|
|          | 0.10     | 0.05  | 0.025  | 0.01   | 0.005  |
| 1        | 3.078    | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.656 |
| 2        | 1.886    | 2.920 | 4.303  | 6.965  | 9.925  |
| 3        | 1.638    | 2.353 | 3.182  | 4.541  | 5.841  |
| 4        | 1.533    | 2.132 | 2.776  | 3.747  | 4.604  |
| 5        | 1.476    | 2.015 | 2.571  | 3.365  | 4.032  |
| 6        | 1.440    | 1.943 | 2.447  | 3.143  | 3.707  |
| 7        | 1.415    | 1.895 | 2.365  | 2.998  | 3.499  |
| 8        | 1.397    | 1.860 | 2.306  | 2.896  | 3.355  |
| 9        | 1.383    | 1.833 | 2.262  | 2.821  | 3.250  |
| 10       | 1.372    | 1.812 | 2.228  | 2.764  | 3.169  |
| 11       | 1.363    | 1.796 | 2.201  | 2.718  | 3.106  |
| 12       | 1.356    | 1.782 | 2.179  | 2.681  | 3.055  |
| 13       | 1.350    | 1.771 | 2.160  | 2.650  | 3.012  |
| 14       | 1.345    | 1.761 | 2.145  | 2.624  | 2.977  |
| 15       | 1.341    | 1.753 | 2.131  | 2.602  | 2.947  |
| 16       | 1.337    | 1.746 | 2.120  | 2.583  | 2.921  |
| 17       | 1.333    | 1.740 | 2.110  | 2.567  | 2.898  |
| 18       | 1.330    | 1.734 | 2.101  | 2.552  | 2.878  |
| 19       | 1.328    | 1.729 | 2.093  | 2.539  | 2.861  |
| 20       | 1.325    | 1.725 | 2.086  | 2.528  | 2.845  |
| 21       | 1.323    | 1.721 | 2.080  | 2.518  | 2.831  |
| 22       | 1.321    | 1.717 | 2.074  | 2.508  | 2.819  |
| 23       | 1.319    | 1.714 | 2.069  | 2.500  | 2.807  |
| 24       | 1.318    | 1.711 | 2.064  | 2.492  | 2.797  |
| 25       | 1.316    | 1.708 | 2.060  | 2.485  | 2.787  |
| 26       | 1.315    | 1.706 | 2.056  | 2.479  | 2.779  |
| 27       | 1.314    | 1.703 | 2.052  | 2.473  | 2.771  |
| 28       | 1.313    | 1.701 | 2.048  | 2.467  | 2.763  |
| 29       | 1.311    | 1.699 | 2.045  | 2.462  | 2.756  |
| 30       | 1.310    | 1.697 | 2.042  | 2.457  | 2.750  |
| 40       | 1.303    | 1.684 | 2.021  | 2.423  | 2.704  |
| 60       | 1.296    | 1.671 | 2.000  | 2.390  | 2.660  |
| 120      | 1.289    | 1.658 | 1.980  | 2.358  | 2.617  |
| 240      | 1.285    | 1.651 | 1.970  | 2.342  | 2.596  |
| $\infty$ | 1.282    | 1.645 | 1.960  | 2.326  | 2.576  |

自由度  $\nu$  の  $t$  分布の上側確率  $\alpha$  に対する  $t$  の値を  $t_\alpha(\nu)$  で表す。  
 例：自由度  $\nu = 20$  の上側 5% 点 ( $\alpha = 0.05$ ) は、 $t_{0.05}(20) = 1.725$  である。  
 表にない自由度に対しては適宜補間すること。

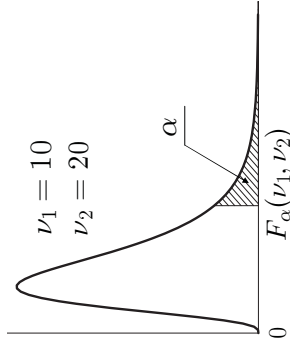
付表3. カイ二乗分布のパーセント点



| ν   | α      |        |        |        |        |        |        |        |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|     | 0.99   | 0.975  | 0.95   | 0.90   | 0.10   | 0.05   | 0.025  | 0.01   |
| 1   | 0.00   | 0.00   | 0.00   | 0.02   | 2.71   | 3.84   | 5.02   | 6.63   |
| 2   | 0.02   | 0.05   | 0.10   | 0.21   | 4.61   | 5.99   | 7.38   | 9.21   |
| 3   | 0.11   | 0.22   | 0.35   | 0.58   | 6.25   | 7.81   | 9.35   | 11.34  |
| 4   | 0.30   | 0.48   | 0.71   | 1.06   | 7.78   | 9.49   | 11.14  | 13.28  |
| 5   | 0.55   | 0.83   | 1.15   | 1.61   | 9.24   | 11.07  | 12.83  | 15.09  |
| 6   | 0.87   | 1.24   | 1.64   | 2.20   | 10.64  | 12.59  | 14.45  | 16.81  |
| 7   | 1.24   | 1.69   | 2.17   | 2.83   | 12.02  | 14.07  | 16.01  | 18.48  |
| 8   | 1.65   | 2.18   | 2.73   | 3.49   | 13.36  | 15.51  | 17.53  | 20.09  |
| 9   | 2.09   | 2.70   | 3.33   | 4.17   | 14.68  | 16.92  | 19.02  | 21.67  |
| 10  | 2.56   | 3.25   | 3.94   | 4.87   | 15.99  | 18.31  | 20.48  | 23.21  |
| 11  | 3.05   | 3.82   | 4.57   | 5.58   | 17.28  | 19.68  | 21.92  | 24.72  |
| 12  | 3.57   | 4.40   | 5.23   | 6.30   | 18.55  | 21.03  | 23.34  | 26.22  |
| 13  | 4.11   | 5.01   | 5.89   | 7.04   | 19.81  | 22.36  | 24.74  | 27.69  |
| 14  | 4.66   | 5.63   | 6.57   | 7.79   | 21.06  | 23.68  | 26.12  | 29.14  |
| 15  | 5.23   | 6.26   | 7.26   | 8.55   | 22.31  | 25.00  | 27.49  | 30.58  |
| 16  | 5.81   | 6.91   | 7.96   | 9.31   | 23.54  | 26.30  | 28.85  | 32.00  |
| 17  | 6.41   | 7.56   | 8.67   | 10.09  | 24.77  | 27.59  | 30.19  | 33.41  |
| 18  | 7.01   | 8.23   | 9.39   | 10.86  | 25.99  | 28.87  | 31.53  | 34.81  |
| 19  | 7.63   | 8.91   | 10.12  | 11.65  | 27.20  | 30.14  | 32.85  | 36.19  |
| 20  | 8.26   | 9.59   | 10.85  | 12.44  | 28.41  | 31.41  | 34.17  | 37.57  |
| 25  | 11.52  | 13.12  | 14.61  | 16.47  | 34.38  | 37.65  | 40.65  | 44.31  |
| 30  | 14.95  | 16.79  | 18.49  | 20.60  | 40.26  | 43.77  | 46.98  | 50.89  |
| 35  | 18.51  | 20.57  | 22.47  | 24.80  | 46.06  | 49.80  | 53.20  | 57.34  |
| 40  | 22.16  | 24.43  | 26.51  | 29.05  | 51.81  | 55.76  | 59.34  | 63.69  |
| 50  | 29.71  | 32.36  | 34.76  | 37.69  | 63.17  | 67.50  | 71.42  | 76.15  |
| 60  | 37.48  | 40.48  | 43.19  | 46.46  | 74.40  | 79.08  | 83.30  | 88.38  |
| 70  | 45.44  | 48.76  | 51.74  | 55.33  | 85.53  | 90.53  | 95.02  | 100.43 |
| 80  | 53.54  | 57.15  | 60.39  | 64.28  | 96.58  | 101.88 | 106.63 | 112.33 |
| 90  | 61.75  | 65.65  | 69.13  | 73.29  | 107.57 | 113.15 | 118.14 | 124.12 |
| 100 | 70.06  | 74.22  | 77.93  | 82.36  | 118.50 | 124.34 | 129.56 | 135.81 |
| 120 | 86.92  | 91.57  | 95.70  | 100.62 | 140.23 | 146.57 | 152.21 | 158.95 |
| 140 | 104.03 | 109.14 | 113.66 | 119.03 | 161.83 | 168.61 | 174.65 | 181.84 |
| 160 | 121.35 | 126.87 | 131.76 | 137.55 | 183.31 | 190.52 | 196.92 | 204.53 |
| 180 | 138.82 | 144.74 | 149.97 | 156.15 | 204.70 | 212.30 | 219.04 | 227.06 |
| 200 | 156.43 | 162.73 | 168.28 | 174.84 | 226.02 | 233.99 | 241.06 | 249.45 |
| 240 | 191.99 | 198.98 | 205.14 | 212.39 | 268.47 | 277.14 | 284.80 | 293.89 |

自由度  $\nu$  のカイ二乗分布の上側確率  $\alpha$  に対する  $\chi^2$  の値を  $\chi^2_{\alpha}(\nu)$  で表す。  
 例：自由度  $\nu = 20$  の上側 5% 点 ( $\alpha = 0.05$ ) は、 $\chi^2_{0.05}(20) = 31.41$  である。  
 表にない自由度に対しては適宜補間すること。

付表 4.  $F$  分布のパーセント点



| $\alpha = 0.05$         |  | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 15    | 20    | 40    | 60    | 120   | $\infty$ |
|-------------------------|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $\nu_2 \setminus \nu_1$ |  |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |
| 5                       |  | 6.608 | 5.786 | 5.409 | 5.192 | 5.050 | 4.950 | 4.876 | 4.818 | 4.772 | 4.735 | 4.619 | 4.558 | 4.464 | 4.431 | 4.398 | 4.365    |
| 10                      |  | 4.965 | 4.103 | 3.708 | 3.478 | 3.326 | 3.217 | 3.135 | 3.072 | 3.020 | 2.978 | 2.845 | 2.774 | 2.661 | 2.621 | 2.580 | 2.538    |
| 15                      |  | 4.543 | 3.682 | 3.287 | 3.056 | 2.901 | 2.790 | 2.707 | 2.641 | 2.588 | 2.544 | 2.403 | 2.328 | 2.204 | 2.160 | 2.114 | 2.066    |
| 20                      |  | 4.351 | 3.493 | 3.098 | 2.866 | 2.711 | 2.599 | 2.514 | 2.447 | 2.393 | 2.348 | 2.203 | 2.124 | 1.994 | 1.946 | 1.896 | 1.843    |
| 25                      |  | 4.242 | 3.385 | 2.991 | 2.759 | 2.603 | 2.490 | 2.405 | 2.337 | 2.282 | 2.236 | 2.089 | 2.007 | 1.872 | 1.822 | 1.768 | 1.711    |
| 30                      |  | 4.171 | 3.316 | 2.922 | 2.690 | 2.534 | 2.421 | 2.334 | 2.266 | 2.211 | 2.165 | 2.015 | 1.932 | 1.792 | 1.740 | 1.683 | 1.622    |
| 40                      |  | 4.085 | 3.232 | 2.839 | 2.606 | 2.449 | 2.336 | 2.249 | 2.180 | 2.124 | 2.077 | 1.924 | 1.839 | 1.693 | 1.637 | 1.577 | 1.509    |
| 60                      |  | 4.001 | 3.150 | 2.758 | 2.525 | 2.368 | 2.254 | 2.167 | 2.097 | 2.040 | 1.993 | 1.836 | 1.748 | 1.594 | 1.534 | 1.467 | 1.389    |
| 120                     |  | 3.920 | 3.072 | 2.680 | 2.447 | 2.290 | 2.175 | 2.087 | 2.016 | 1.959 | 1.910 | 1.750 | 1.659 | 1.495 | 1.429 | 1.352 | 1.254    |

| $\alpha = 0.025$        |  | 1      | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 15    | 20    | 40    | 60    | 120   | $\infty$ |
|-------------------------|--|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $\nu_2 \setminus \nu_1$ |  |        |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |
| 5                       |  | 10.007 | 8.434 | 7.764 | 7.388 | 7.146 | 6.978 | 6.853 | 6.757 | 6.681 | 6.619 | 6.428 | 6.329 | 6.175 | 6.123 | 6.069 | 6.015    |
| 10                      |  | 6.937  | 5.456 | 4.826 | 4.468 | 4.236 | 4.072 | 3.950 | 3.855 | 3.779 | 3.717 | 3.522 | 3.419 | 3.255 | 3.198 | 3.140 | 3.080    |
| 15                      |  | 6.200  | 4.765 | 4.153 | 3.804 | 3.576 | 3.415 | 3.293 | 3.199 | 3.123 | 3.060 | 2.862 | 2.756 | 2.585 | 2.524 | 2.461 | 2.395    |
| 20                      |  | 5.871  | 4.461 | 3.859 | 3.515 | 3.289 | 3.128 | 3.007 | 2.913 | 2.837 | 2.774 | 2.573 | 2.464 | 2.287 | 2.223 | 2.156 | 2.085    |
| 25                      |  | 5.686  | 4.291 | 3.694 | 3.353 | 3.129 | 2.969 | 2.848 | 2.753 | 2.677 | 2.613 | 2.411 | 2.300 | 2.118 | 2.052 | 1.981 | 1.906    |
| 30                      |  | 5.568  | 4.182 | 3.589 | 3.250 | 3.026 | 2.867 | 2.746 | 2.651 | 2.575 | 2.511 | 2.307 | 2.195 | 2.009 | 1.940 | 1.866 | 1.787    |
| 40                      |  | 5.424  | 4.051 | 3.463 | 3.126 | 2.904 | 2.744 | 2.624 | 2.529 | 2.452 | 2.388 | 2.182 | 2.068 | 1.875 | 1.803 | 1.724 | 1.637    |
| 60                      |  | 5.286  | 3.925 | 3.343 | 3.008 | 2.786 | 2.627 | 2.507 | 2.412 | 2.334 | 2.270 | 2.061 | 1.944 | 1.744 | 1.667 | 1.581 | 1.482    |
| 120                     |  | 5.152  | 3.805 | 3.227 | 2.894 | 2.674 | 2.515 | 2.395 | 2.299 | 2.222 | 2.157 | 1.945 | 1.825 | 1.614 | 1.530 | 1.433 | 1.310    |

自由度  $(\nu_1, \nu_2)$  の  $F$  分布の上側確率  $\alpha$  に対する  $F$  の値を  $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$  で表す。  
 例：自由度  $\nu_1 = 5, \nu_2 = 20$  の上側 5% 点 ( $\alpha = 0.05$ ) は,  $F_{0.05}(5, 20) = 2.711$  である。  
 表にない自由度に対しては適宜補間すること。

付表 5. 指数関数と常用対数

| 指数関数 |        |      |        | 常用対数 |               |      |               |
|------|--------|------|--------|------|---------------|------|---------------|
| $x$  | $e^x$  | $x$  | $e^x$  | $x$  | $\log_{10} x$ | $x$  | $\log_{10} x$ |
| 0.01 | 1.0101 | 0.51 | 1.6653 | 0.1  | -1.0000       | 5.1  | 0.7076        |
| 0.02 | 1.0202 | 0.52 | 1.6820 | 0.2  | -0.6990       | 5.2  | 0.7160        |
| 0.03 | 1.0305 | 0.53 | 1.6989 | 0.3  | -0.5229       | 5.3  | 0.7243        |
| 0.04 | 1.0408 | 0.54 | 1.7160 | 0.4  | -0.3979       | 5.4  | 0.7324        |
| 0.05 | 1.0513 | 0.55 | 1.7333 | 0.5  | -0.3010       | 5.5  | 0.7404        |
| 0.06 | 1.0618 | 0.56 | 1.7507 | 0.6  | -0.2218       | 5.6  | 0.7482        |
| 0.07 | 1.0725 | 0.57 | 1.7683 | 0.7  | -0.1549       | 5.7  | 0.7559        |
| 0.08 | 1.0833 | 0.58 | 1.7860 | 0.8  | -0.0969       | 5.8  | 0.7634        |
| 0.09 | 1.0942 | 0.59 | 1.8040 | 0.9  | -0.0458       | 5.9  | 0.7709        |
| 0.10 | 1.1052 | 0.60 | 1.8221 | 1.0  | 0.0000        | 6.0  | 0.7782        |
| 0.11 | 1.1163 | 0.61 | 1.8404 | 1.1  | 0.0414        | 6.1  | 0.7853        |
| 0.12 | 1.1275 | 0.62 | 1.8589 | 1.2  | 0.0792        | 6.2  | 0.7924        |
| 0.13 | 1.1388 | 0.63 | 1.8776 | 1.3  | 0.1139        | 6.3  | 0.7993        |
| 0.14 | 1.1503 | 0.64 | 1.8965 | 1.4  | 0.1461        | 6.4  | 0.8062        |
| 0.15 | 1.1618 | 0.65 | 1.9155 | 1.5  | 0.1761        | 6.5  | 0.8129        |
| 0.16 | 1.1735 | 0.66 | 1.9348 | 1.6  | 0.2041        | 6.6  | 0.8195        |
| 0.17 | 1.1853 | 0.67 | 1.9542 | 1.7  | 0.2304        | 6.7  | 0.8261        |
| 0.18 | 1.1972 | 0.68 | 1.9739 | 1.8  | 0.2553        | 6.8  | 0.8325        |
| 0.19 | 1.2092 | 0.69 | 1.9937 | 1.9  | 0.2788        | 6.9  | 0.8388        |
| 0.20 | 1.2214 | 0.70 | 2.0138 | 2.0  | 0.3010        | 7.0  | 0.8451        |
| 0.21 | 1.2337 | 0.71 | 2.0340 | 2.1  | 0.3222        | 7.1  | 0.8513        |
| 0.22 | 1.2461 | 0.72 | 2.0544 | 2.2  | 0.3424        | 7.2  | 0.8573        |
| 0.23 | 1.2586 | 0.73 | 2.0751 | 2.3  | 0.3617        | 7.3  | 0.8633        |
| 0.24 | 1.2712 | 0.74 | 2.0959 | 2.4  | 0.3802        | 7.4  | 0.8692        |
| 0.25 | 1.2840 | 0.75 | 2.1170 | 2.5  | 0.3979        | 7.5  | 0.8751        |
| 0.26 | 1.2969 | 0.76 | 2.1383 | 2.6  | 0.4150        | 7.6  | 0.8808        |
| 0.27 | 1.3100 | 0.77 | 2.1598 | 2.7  | 0.4314        | 7.7  | 0.8865        |
| 0.28 | 1.3231 | 0.78 | 2.1815 | 2.8  | 0.4472        | 7.8  | 0.8921        |
| 0.29 | 1.3364 | 0.79 | 2.2034 | 2.9  | 0.4624        | 7.9  | 0.8976        |
| 0.30 | 1.3499 | 0.80 | 2.2255 | 3.0  | 0.4771        | 8.0  | 0.9031        |
| 0.31 | 1.3634 | 0.81 | 2.2479 | 3.1  | 0.4914        | 8.1  | 0.9085        |
| 0.32 | 1.3771 | 0.82 | 2.2705 | 3.2  | 0.5051        | 8.2  | 0.9138        |
| 0.33 | 1.3910 | 0.83 | 2.2933 | 3.3  | 0.5185        | 8.3  | 0.9191        |
| 0.34 | 1.4049 | 0.84 | 2.3164 | 3.4  | 0.5315        | 8.4  | 0.9243        |
| 0.35 | 1.4191 | 0.85 | 2.3396 | 3.5  | 0.5441        | 8.5  | 0.9294        |
| 0.36 | 1.4333 | 0.86 | 2.3632 | 3.6  | 0.5563        | 8.6  | 0.9345        |
| 0.37 | 1.4477 | 0.87 | 2.3869 | 3.7  | 0.5682        | 8.7  | 0.9395        |
| 0.38 | 1.4623 | 0.88 | 2.4109 | 3.8  | 0.5798        | 8.8  | 0.9445        |
| 0.39 | 1.4770 | 0.89 | 2.4351 | 3.9  | 0.5911        | 8.9  | 0.9494        |
| 0.40 | 1.4918 | 0.90 | 2.4596 | 4.0  | 0.6021        | 9.0  | 0.9542        |
| 0.41 | 1.5068 | 0.91 | 2.4843 | 4.1  | 0.6128        | 9.1  | 0.9590        |
| 0.42 | 1.5220 | 0.92 | 2.5093 | 4.2  | 0.6232        | 9.2  | 0.9638        |
| 0.43 | 1.5373 | 0.93 | 2.5345 | 4.3  | 0.6335        | 9.3  | 0.9685        |
| 0.44 | 1.5527 | 0.94 | 2.5600 | 4.4  | 0.6435        | 9.4  | 0.9731        |
| 0.45 | 1.5683 | 0.95 | 2.5857 | 4.5  | 0.6532        | 9.5  | 0.9777        |
| 0.46 | 1.5841 | 0.96 | 2.6117 | 4.6  | 0.6628        | 9.6  | 0.9823        |
| 0.47 | 1.6000 | 0.97 | 2.6379 | 4.7  | 0.6721        | 9.7  | 0.9868        |
| 0.48 | 1.6161 | 0.98 | 2.6645 | 4.8  | 0.6812        | 9.8  | 0.9912        |
| 0.49 | 1.6323 | 0.99 | 2.6912 | 4.9  | 0.6902        | 9.9  | 0.9956        |
| 0.50 | 1.6487 | 1.00 | 2.7183 | 5.0  | 0.6990        | 10.0 | 1.0000        |

注: 常用対数を自然対数に直すには 2.3026 をかければよい。







【解答冊子記入例】

- 注意事項 6 ⑥ : [解答冊子各ページ先頭の記入例]

(例) 問 1 を解答する場合

|      |               |           |    |                  |
|------|---------------|-----------|----|------------------|
| 受験番号 | 1 2 3 4 5 6 7 | 問題番号..... | 問1 | 両端の余白には何も記入しないこと |
|      | .....         |           |    |                  |
|      | .....         |           |    |                  |
|      | .....         |           |    |                  |

- 注意事項 6 ⑦ : [解答冊子表紙選択問題の記入例]

(例) 問 2, 問 3, 問 5 を選択し, 解答する場合

5 問から 3 問を選択して解答すること。(得点欄には何も書かないこと。)

「問2」「問3」「問5」を  
○で囲む

|      |       |       |       |       |       |      |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| 統計数理 |       |       |       |       |       |      |
| 問題番号 | ○ 問 1 | ● 問 2 | ● 問 3 | ○ 問 4 | ● 問 5 | 合計得点 |
|      |       |       |       |       |       |      |

著作権法により、本冊子の無断での複製・転載等は禁止されています。

一般財団法人 統計質保証推進協会  
**統計検定センター**

〒101-0051 東京都千代田区神田神保町 3 丁目 6 番  
 URL <http://www.toukei-kentei.jp>