2026年度1級 統計数理・略解

問1

〔1〕 $P(X_1 \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda(x-\theta)} & (x > \theta) \\ 0 & (x \leq \theta) \end{cases}$

〔2〕 $P(Y_n > \theta + \varepsilon) = e^{-\lambda\varepsilon n}$

〔3〕 上問〔2〕の結果より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$P(|Y_n - \theta| > \varepsilon) = e^{-\lambda\varepsilon n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つことから示される。

〔4〕 求める条件は n/γ_n がある正の定数 c に収束することであり，そのときの Z_n の漸近分布は指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda c)$ である。

〔5〕 $(\widehat{\theta}_n,\ \widehat{\lambda}_n) = \left(Y_n,\ \dfrac{1}{\overline{X}_n - Y_n}\right)$ である。ただし $\overline{X}_n$ は標本平均。

〔6〕〔6-1〕 $E[X_i] = \theta + \dfrac{1}{\lambda}$ であり，また，上問〔3〕の結果より $\widehat{\theta}_n = Y_n \xrightarrow{p} \theta \ \ (n \to \infty)$ となる。従って，大数の法則，スラツキーの定理，連続写像定理から

$$\widehat{\lambda}_n \xrightarrow{p} \frac{1}{(1/\lambda + \theta) - \theta} = \lambda \quad (n \to \infty)$$

を得る。

〔6-2〕 上問〔3〕と同様に，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$P(|\sqrt{n}(Y_n - \theta)| > \varepsilon) = e^{-\lambda\varepsilon\sqrt{n}} \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

が成り立つことから，$\sqrt{n}(Y_n - \theta) \xrightarrow{p} 0 \ (n \to \infty)$ が示される。

〔6-3〕 $N\left(0,\ \dfrac{1}{\lambda^2}\right)$

〔6-4〕 $N\left(0,\ \lambda^2\right)$

問 2

〔1〕 $E[\widetilde{\beta}_1] = \beta_1$

〔2〕 $E[\widetilde{\beta}_1] = \beta_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}\beta_2$

〔3〕 $\mathrm{MSE}(\widetilde{\beta}_1) = \dfrac{\sigma^2}{a_{11}} + \dfrac{\beta_2^2 a_{12}^2}{a_{11}^2}$

〔4〕 $\beta_0 \in \mathbb{R},\ \beta_1 \in \mathbb{R},\ -\sqrt{\dfrac{\sigma^2 a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}} < \beta_2 < \sqrt{\dfrac{\sigma^2 a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}$

〔5〕 予測バイアスは $E[\widehat{Y}^* - Y^*] = \beta_2 \left(\dfrac{a_{12}}{a_{11}}(x_1^* - \overline{x}_1) - (x_2^* - \overline{x}_2) \right)$ であり，$\beta_0, \beta_1, \beta_2$ によらず予測バイアスが 0 となるのは $(a_{12}/a_{11})(x_1^* - \overline{x}_1) - (x_2^* - \overline{x}_2) = 0$ のときである。すなわち，(x_1^*, x_2^*) が，$\{x_{i2}\}$ を $\{x_{i1}\}$ で説明する単回帰直線

$$X_2 = \overline{x}_2 + \frac{a_{12}}{a_{11}}(X_1 - \overline{x}_1)$$

上にあるとき，予測バイアスは 0 となる。

問 3

〔1〕 $\widehat{\lambda}_n = \overline{X}$

〔2〕 $P\left(\widehat{\lambda}_n = \dfrac{x}{n}\right) = e^{-n\lambda}\dfrac{(n\lambda)^x}{x!} \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$

〔3〕 $N(0, \lambda)$

〔4〕 $N(0, \lambda e^{-2\lambda})$

〔5〕〔5-1〕 T_n は θ の一致推定量であり，漸近有効推定量であるが，不偏推定量ではない。

〔5-2〕 U_n は θ の一致推定量であり，不偏推定量であるが，漸近有効推定量ではない。

〔5-3〕 漸近分散の観点からは T_n の方が優れており，不偏性の観点からは U_n の方が優れている。

問 4

〔1〕 $X_1, \ldots, X_n$ の同時確率関数は $f(X_1, \ldots, X_n \mid \theta) = \theta^n (1-\theta)^{S_n}$ と書けるから，分解定理より S_n は十分統計量である。

〔2〕 $E[X_1] = (1-\theta)/\theta$

〔3〕 事後確率分布はベータ分布 $\mathrm{Be}(\alpha + n, \beta + S_n)$ である。

〔4〕 $E[\theta^{-1} \mid X_1, \ldots, X_n] = \dfrac{\alpha + \beta + n + S_n - 1}{\alpha + n - 1}$

〔5〕 $P(X_{n+1} \geq y \mid \theta) = (1-\theta)^y$，$P(X_{n+1} \geq y \mid X_1, \ldots, X_n) = \dfrac{B(\alpha + n, \beta + S_n + y)}{B(\alpha + n, \beta + S_n)}$

〔6〕〔6-1〕 $P(X_4 \geq y) = \dfrac{1}{y+1}$

〔6-2〕 $P(X_4 \geq y \mid X_1 = X_2 = X_3 = 0) = \dfrac{y!}{(5+y-1)(5+y-2)\cdots 5}$

〔6-3〕 $P(X_4 \geq 3) = \dfrac{1}{4}$，$P(X_4 \geq 3 \mid X_1 = X_2 = X_3 = 0) = \dfrac{1}{35}$ となるから $P(X_4 \geq 3) > P(X_4 \geq 3 \mid X_1 = X_2 = X_3 = 0)$ である。これは，$X_1 = X_2 = X_3 = 0$ という観測によって，事前分布 $\mathrm{Be}(1,1)$ は事後分布 $\mathrm{Be}(4,1)$ に更新され，θ は大きな値をとりやすい，と判断された結果であると解釈できる。

〔6-4〕 $y = 3$

問 5

〔1〕 $E[\boldsymbol{X}^\top M \boldsymbol{X}] = E[\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^\top M \boldsymbol{X})] = E[\mathrm{tr}(M \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top)] = \mathrm{tr}(M E[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top]) = \mathrm{tr}(M\Sigma)$

〔2〕 上問〔1〕で示された公式を，$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}, \Sigma = A$ として使うと示される。

〔3〕 $D(A||B) = \displaystyle\int f(\boldsymbol{x}|A) \left(-\log \frac{f(\boldsymbol{x}|B)}{f(\boldsymbol{x}|A)} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \geq \int f(\boldsymbol{x}|A) \left(-\frac{f(\boldsymbol{x}|B)}{f(\boldsymbol{x}|A)} + 1 \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$ となる。等号成立の必要十分条件は，全ての $\boldsymbol{x}$ で $f(\boldsymbol{x}|A) = f(\boldsymbol{x}|B)$，つまり $A = B$。

〔4〕 $d_n = -\dfrac{np}{2}\log(2\pi) - \dfrac{n}{2}\log|S_n| - \dfrac{np}{2}$

〔5〕 $\widehat{\Sigma}_n = S_n$