１級（数理）略解 (25)

問１

[1]　条件は $\theta_j \geq 0\ (j=1,\ldots,m)$, $\dfrac{\theta_1+\cdots+\theta_m}{m}=1$ である。

[2]　尤度関数は $L(\theta)=\prod_{j=1}^{m}\theta_j^{N_j}$ である。

[3]　最尤推定量は $\hat{\theta}_j=\dfrac{mN_j}{n}$ となる。

[4]　AIC は $\mathrm{AIC}=-2\sum_{j=1}^{m}N_j\log\dfrac{mN_j}{n}+2(m-1)$ となる。

[5]　小区間の個数が m のときの AIC を AIC_m とすると，$\mathrm{AIC}_2=2$，$\mathrm{AIC}_3=-0.87$，$\mathrm{AIC}_4=1.50$ であるので，$m=3$ が選ばれる。

問２

[1]　$C=\dfrac{2}{\pi}$

[2]　尤度関数は $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{C}{1+(X_i-\theta)^2}\cdot\mathbf{1}_{\{\hat{\theta}_n>\theta\}}$ となる。ここで $\mathbf{1}_{\{A\}}$ は条件 A を満たすときに 1，満たさないときに 0 となる指示関数である。$L(\theta)$ は「$\hat{\theta}_n$ と θ のみの関数」と「θ に依存しない統計量のみの関数」の積に分解できないので，$\hat{\theta}_n$ は十分統計量でない。

[3]　$P(T_n\leq x)=1-\left(1-\dfrac{2}{\pi}\mathrm{Arctan}\dfrac{x}{n}\right)^n$

[4]　$\lim_{n\to\infty}P(T_n\leq x)=1-e^{-2x/\pi}$

[5]　信頼区間は $I_\alpha=\left[\hat{\theta}_n+\dfrac{\pi\log(\frac{\alpha}{2})}{2n},\hat{\theta}_n+\dfrac{\pi\log(1-\frac{\alpha}{2})}{2n}\right]$ となる。

問３

[1]　最尤推定量は $\hat{\beta}=\dfrac{S_{xY}}{S_{xx}}$，$\hat{\alpha}=\overline{Y}-\hat{\beta}\overline{x}$ となる。

[2]　$\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\overline{Y})^2=\dfrac{{S_{xY}}^2}{S_{xx}}$

[3]　W は正規分布 $N(\beta\sqrt{S_{xx}}/\sigma,1)$ に従う。

[4]　$Z=S_e/\sigma^2$ は自由度 $n-2$ のカイ二乗分布に従う。

[5]　$S_{YY}=\sigma^2(Z+W^2)$ の関係式より $r_{xY}=\dfrac{W}{\sqrt{Z+W^2}}$ が導かれる。r_{xY} の確率密度関数は

$$f(r)=\frac{1}{B(\frac{1}{2},\frac{n-2}{2})}(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}\quad(-1<r<1)$$

となる。ただし，$B(a,b)$ はベータ関数である。

問４

[1]　実現値 x に対応したサイズ $P_0(X=x)$ と検出力 $P_1(X=x)$ は以下のようである。

x	0	1	2	3	4
$P_0(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

x	0	1	2	3	4
$P_1(X=x)$	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

[2]　サイズが 0 でない有意水準 $\alpha=0.125$ の非確率化検定で $\{x\mid x\geq c\}$ の形に書ける棄却域は $\{4\}$ のみ（$3<c\leq 4$ の場合）である。この検定のサイズは 1/16 で，検出力は 16/81 である。

[3]　条件を満たす棄却域は $A=\{0\}$，$\{4\}$，$\{0,4\}$ なので，それぞれのサイズと検出力は以下のようである。

棄却域	サイズ	検出力
$\{0\}$	1/16	1/81
$\{4\}$	1/16	16/81
$\{0,4\}$	1/8	17/81

[4]　$r=2/3$ である。このときの検出力は $64/243\approx 0.2634$ であり，上問 [3] で求めた最大の検出力 $17/81\approx 0.2098$ よりも大きい。

[5]　最強力検定は

$$\delta^*(x)=\begin{cases}1 & (x>3)\\ 1/4 & (x=3)\\ 0 & (x<3)\end{cases}$$

であり，検出力は $24/81\approx 0.2962$ となる。

問５

[1-1]　和 $Z=X_1+X_2$ の確率関数は，たたみ込みにより

$$P(Z=z)=\sum_{x=0}^{z}P(X_1=x)P(X_2=z-x)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^z}{z!}$$

となる。したがって，X_1+X_2 は $Po(\lambda_1+\lambda_2)$ に従う。

[1-2]　$\phi_n(\theta)=\exp\left[\dfrac{\lambda}{n}(e^{\theta}-1)\right]$ より f_n はポアソン分布 $Po(\lambda/n)$ である。

[2-1]　$Y_1=\log X_1$，$Y_2=\log X_2$ は互いに独立にそれぞれ $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$N(\mu_2,\sigma_2^2)$ に従うことより，$X_1X_2=\exp(Y_1+Y_2)$ の確率密度関数は $g(x;\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$ となる。

[2-2]　f_n は $g(x;\mu/n,\sigma^2/n)$ である。

[2-3]　対数正規分布の平均と分散はそれぞれ

$$E[X]=\exp\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right) \tag{1}$$

$$V[X]=\exp(2\mu+\sigma^2)\{\exp(\sigma^2)-1\} \tag{2}$$

となる。パラメータ μ, σ^2 の最尤推定量はそれぞれ

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log X_i,\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\log X_i-\hat{\mu})^2$$

であり，これらを式 (1) および (2) に代入したものがそれぞれ対数正規分布の平均と分散の最尤推定量となる。