1 級（人文）略解 (25)

問１

[1]　$\mu = p_1\mu_1 + p_2\mu_2$，$\sigma^2 = p_1\sigma_1^{\ 2} + p_2\sigma_2^{\ 2} + p_1p_2(\mu_1-\mu_2)^2$。表 1 より $\mu = 45$，$\sigma^2 = 975$ となる。

[2]　$E[\bar{X}] = 45$，$V[\bar{X}] = 9.75$。

[3]　$V[\tilde{X}] = (p_1\sigma_1^{\ 2} + p_2\sigma_2^{\ 2})/n$ であり，表 1 より $V[\tilde{X}] = 3.00$ となる。

[4]　$V[\tilde{X}] = (p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2)^2/n$ であり，表 1 より，$n_1 = 50$，$n_2 = 50$ で，$V[\tilde{X}] = 2.25$ となる。

問２

[1]　【ア】70,【イ】0.88,【ウ】64.4,【エ】0.89,【オ】900

[2]　【カ】0.4,【キ】0.92,【ク】0.2,【ケ】0.79,【コ】0.59

ただし,【ケ】,【コ】の値は計算途中の四捨五入により小数第 2 位の値が異なる。

問３

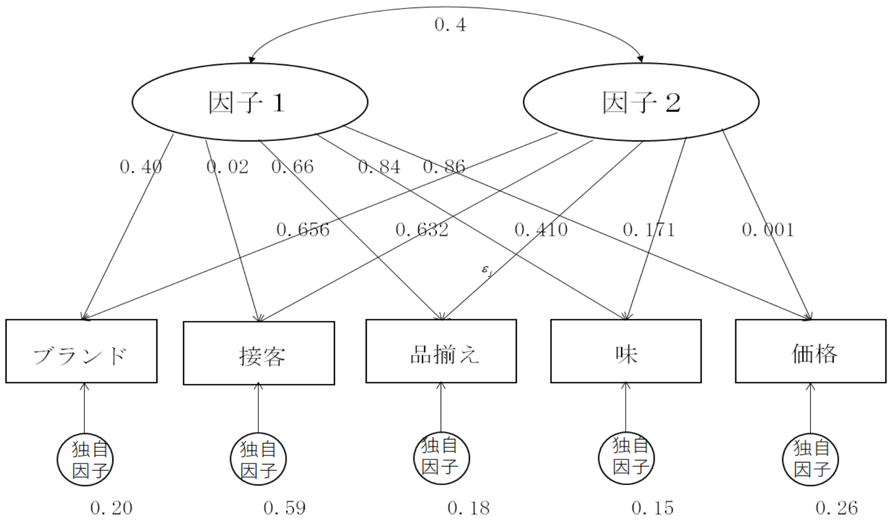
[1]　(A) の値は 0.80 である。「接客」と因子 1 の間の相関係数は 0.4 で,「接客」と「品揃え」の間の相関係数は 0.41 である。

[2]　因子 1 および因子 2 の寄与率はそれぞれ 0.582，0.142 である。

[3]　(B) の値は ±0.80 となるが，他の変数の回転も考えると正の 0.80 が好ましい。

[4]　因子 1 と因子 2 の間の相関係数は約 0.40 である。

[5]　パス図は以下のようである。



問４

[1]　得点の予測値は約 72 点である。

[2]　$\hat{\beta}_1 = \dfrac{r_{y1} - r_{12} r_{y2}}{1 - r_{12}^2}$

[3]　$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}_1 - r_{12}\boldsymbol{x}_2$，　$s_z^2 = 1 - r_{12}^2$，　$s_{yz} = r_{y1} - r_{12} r_{y2}$

[4]　$\hat{\alpha} = \dfrac{s_{yz}}{s_z^2}$　であり，上問 [3] の結果を代入して　$\hat{\alpha} = \dfrac{r_{y1} - r_{12} r_{y2}}{1 - r_{12}^2} = \hat{\beta}_1$　を得る。

[5]　$\hat{\alpha}$　の標準誤差は　$\dfrac{1}{1 - r_{12}^2}\sqrt{\dfrac{1 - r_{12}^2 - (r_{y1} - r_{12} r_{y2})^2}{n-1}}$　となる。

問５

[1]　$E[\tilde{\pi}] = 0.2 + 0.7\pi$，　$V[\tilde{\pi}] = \dfrac{1}{n}(0.2 + 0.7\pi)(0.8 - 0.7\pi)$

[2]　$\hat{\pi} = \begin{cases} 0 & (m < 0.2n) \\ (m - 0.2n)/(0.7n) & (0.2n \le m \le 0.9n) \\ 1 & (m > 0.9n) \end{cases}$

[3]　確率は $(1 + \pi)/3$ である。

[4]　$\breve{\pi} = \begin{cases} 0 & (t < n/3) \\ (3t/n) - 1 & (n/3 \le t \le 2n/3) \\ 1 & (t > 2n/3) \end{cases}$

[5]　$0 < p < 0.5$ もしくは $0.5 < p < 1$ とする必要があるが，どの値がよいかは，パラメータの推定効率や回答の正直さを勘案すべきで，最適な値はない。

１級（社会）略解 (25)

問１

[1]　$\mu = p_1\mu_1 + p_2\mu_2$，$\sigma^2 = p_1\sigma_1{}^2 + p_2\sigma_2{}^2 + p_1p_2(\mu_1-\mu_2)^2$。表 1 より $\mu = 45$，$\sigma^2 = 975$ となる。

[2]　$E[\bar{X}] = 45$，$V[\bar{X}] = 9.75$

[3]　有限母集団修正を行わないので $V[\tilde{X}] = (p_1\sigma_1{}^2 + p_2\sigma_2{}^2)/n$ であり，表 1 より $V[\tilde{X}]$ = 3.00 となる。

[4]　$V[\tilde{X}] = (p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2)^2/n$ であり，表 1 より，$n_1 = 50$，$n_2 = 50$ で，$V[\tilde{X}] = 2.25$ となる。

問２

[1]　最尤推定値は $\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ となり，表 1 より $\hat{\lambda} = 0.7$ を得る。

[2]　確率が単調減少となるための条件は $\lambda < 1$。

[3]　$C(\tau) = 1/(1-e^{-\tau})$ であり，確率が単調減少となるための条件は $\tau < 2$。

[4]　$E[Y \mid Y \geq 1] = \dfrac{\tau}{1-e^{-\tau}}$

[5]　$g(\hat{\tau}) = \dfrac{\hat{\tau}}{1-e^{-\hat{\tau}}}$ である。例えば，初期値を $\tau^{(0)} = \bar{y}$ として $\tau^{(t+1)} = \bar{y}(1-\exp[-\tau^{(t)}])$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ とする反復スキームが得られる。

[6]　$\hat{p} = 0.5$。例えば，最尤推定値 $\hat{\lambda}$ を用いると，$P(Y = 0)$ の推定値は $e^{-\hat{\lambda}}$ となるので，

$\hat{p}$ と $e^{-\hat{\lambda}}$ の乖離具合を，帰無仮説 $H_0 : p = e^{-\lambda}$，対立仮説 $H_1 : p \neq e^{-\lambda}$ に関する検定，

例えばピアソンの適合度検定あるいはスコア検定などにより評価する。

問３

[1]　β の最小二乗推定値は $\hat{\beta} = 0.5$，α の最小二乗推定値は $\hat{\alpha} = 5$ となる。

[2]　正データに対する β と α の最小二乗推定値は $\tilde{\beta} = -0.5$ および $\tilde{\alpha} = 90$ となる。

[3]　$\alpha = -8.225$，$\beta = 0.1645$

[4]　$1/\sqrt{2\pi}$

問４

[1]　y_t と y_{t-k} の共分散は 0 であることが式展開により示せる。

[2]　y_t の尖度は $\dfrac{E[(y_t-\mu)^4]}{(V[y_t])^2} = \dfrac{3E[\sigma_t^4]}{(E[\sigma_t^2])^2}$ となり，$E[\sigma_t^4] = E[(\sigma_t^2)^2] > (E[(\sigma_t^2)])^2$ であるので，尖度は 3 よりも大きくなる。

[3]　$u_t = y_t - \mu$ と置くと，1 次の自己相関係数は $\dfrac{Cov[u_t^2, u_{t-1}^2]}{V[u_{t-1}^2]} = \beta_1 = 0.5$ となる。

[4]　条件付き分布は $N(0.4, (0.4)^2)$ となる。

[5]　$B \approx -0.5304$

問５

[1]　$E[\tilde{\pi}] = 0.2 + 0.7\pi$ ，$V[\tilde{\pi}] = \dfrac{1}{n}(0.2 + 0.7\pi)(0.8 - 0.7\pi)$

[2]　$\hat{\pi} = \begin{cases} 0 & (m < 0.2n) \\ (m - 0.2n)/(0.7n) & (0.2n \le m \le 0.9n) \\ 1 & (m > 0.9n) \end{cases}$

[3]　確率は $(1 + \pi)/3$ である。

[4]　$\breve{\pi} = \begin{cases} 0 & (t < n/3) \\ (3t/n) - 1 & (n/3 \le t \le 2n/3) \\ 1 & (t > 2n/3) \end{cases}$

[5]　$0 < p < 0.5$ もしくは $0.5 < p < 1$ とする必要があるが，どの値がよいかは，パラメータの推定効率や回答の正直さを勘案すべきで，最適な値はない。

問１

[1-1]　ア：平均，イ：分散（ばらつき，範囲，散らばり，なども可）

[1-2]　$A = 0.7285$

[2-1]　$\mu = (S_L + S_U)/2$。不良率の最小値は 0.0026 である。

[2-2]　$\mu = (S_L + S_U)/2$。不良率の最大値は 0.0026 である。

[2-3]　点推定値は $\hat{C}_p = 1.143$，95%信頼区間は [0.7827, 1.5029] となる。

問２

[1]　0.9025

[2]　0.1083

[3]　$\boldsymbol{e}_1{}^T P^{10} \boldsymbol{e}_3$

[4-1]　$\hat{\theta}_1 = 0.05, \hat{\theta}_2 = 0.025, \hat{\theta}_3 = 0.14$

[4-2]　尤度比検定統計量は，$\hat{\theta}$ を最尤推定値，θ_0 を帰無仮説におけるパラメータの値とすると，

$$2\log\frac{L(\hat{\theta})}{L(\theta_0)} = 2\cdot(185\log\frac{0.925}{0.95} + 10\log\frac{0.05}{0.04} + 5\log\frac{0.025}{0.01} + 129\log\frac{0.86}{0.95} + 21\log\frac{0.14}{0.05})$$

となる。自由度は 3 である。

問３

[1]　得点の予測値は約 72 点である。

[2]　$\hat{\beta}_1 = \dfrac{r_{y1} - r_{12}r_{y2}}{1 - r_{12}^2}$

[3]　$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}_1 - r_{12}\boldsymbol{x}_2$，$s_z^2 = 1 - r_{12}^2$，$s_{yz} = r_{y1} - r_{12}r_{y2}$

[4]　$\hat{\alpha} = \dfrac{s_{yz}}{s_z^2}$ であり，上問 [3] の結果を代入して $\hat{\alpha} = \dfrac{r_{y1} - r_{12}r_{y2}}{1 - r_{12}^2} = \hat{\beta}_1$ を得る。

[5]　$\hat{\alpha}$ の標準誤差は $\dfrac{1}{1 - r_{12}^2}\sqrt{\dfrac{1 - r_{12}^2 - (r_{y1} - r_{12}r_{y2})^2}{n-1}}$ となる。

問 4

[1]　モデル 1：$\overline{Y} = (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)/4$ として

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \\ \hat{\mu}_3 \\ \hat{\mu}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Y} \\ \overline{Y} \\ \overline{Y} \\ \overline{Y} \end{pmatrix}$$

モデル 2： $\hat{\theta}_A = (Y_1 + Y_2)/2, \hat{\theta}_B = (Y_3 + Y_4)/2$ として

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \\ \hat{\mu}_3 \\ \hat{\mu}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_A \\ \hat{\theta}_A \\ \hat{\theta}_B \\ \hat{\theta}_B \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Y_1 + Y_2 \\ Y_1 + Y_2 \\ Y_3 + Y_4 \\ Y_3 + Y_4 \end{pmatrix}$$

モデル 3： $\hat{\theta}_A = (Y_1 + Y_2)/2, \hat{\theta}_B = (Y_3 + Y_4)/2, \hat{\theta}_C = (Y_1 - Y_2 + Y_3 - Y_4)/4$ として

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \\ \hat{\mu}_3 \\ \hat{\mu}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_A + \hat{\theta}_C \\ \hat{\theta}_A - \hat{\theta}_C \\ \hat{\theta}_B + \hat{\theta}_C \\ \hat{\theta}_B - \hat{\theta}_C \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3Y_1 + Y_2 + Y_3 - Y_4 \\ Y_1 + 3Y_2 - Y_3 + Y_4 \\ Y_1 - Y_2 + 3Y_3 + Y_4 \\ -Y_1 + Y_2 + Y_3 + 3Y_4 \end{pmatrix}$$

[2]　モデル 1：バリアンス項は $\sum_{i=1}^{4} V[\hat{\mu}_i] = \sigma^2$，バイアス項は $\frac{1}{4}\sum_{i<j}(\mu_i - \mu_j)^2$。

モデル 2：バリアンス項は $\sum_{i=1}^{4} V[\hat{\mu}_i] = 2\sigma^2$，バイアス項は $\frac{1}{2}\{(\mu_1 - \mu_2)^2 + (\mu_3 - \mu_4)^2\}$。

モデル 3：バリアンス項は $\sum_{i=1}^{4} V[\hat{\mu}_i] = 3\sigma^2$，バイアス項は $\frac{1}{4}(\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + \mu_4)^2$。

[3]　モデル 1 のバリアンス項 $<$ モデル 2 のバリアンス項 $<$ モデル 3 のバリアンス項

[4]　モデル 1 のバイアス項 $\geq$ モデル 2 のバイアス項 $\geq$ モデル 3 のバイアス項

問 5

[1]　$E[\tilde{\pi}] = 0.2 + 0.7\pi$ ，$V[\tilde{\pi}] = \frac{1}{n}(0.2 + 0.7\pi)(0.8 - 0.7\pi)$

[2]　$\hat{\pi} = \begin{cases} 0 & (m < 0.2n) \\ (m - 0.2n)/(0.7n) & (0.2n \leq m \leq 0.9n) \\ 1 & (m > 0.9n) \end{cases}$

[3]　確率は $(1 + \pi)/3$ である。

[4]　$\breve{\pi} = \begin{cases} 0 & (t < n/3) \\ (3t/n) - 1 & (n/3 \leq t \leq 2n/3) \\ 1 & (t > 2n/3) \end{cases}$

[5]　$0 < p < 0.5$ もしくは $0.5 < p < 1$ とする必要があるが，どの値がよいかは，パラメータの推定効率や回答の正直さを勘案すべきで，最適な値はない。

１級（医薬）略解 (25)

問１

[1]　帰無仮説 $H_0 : \delta = 0$，対立仮説 $H_1 : \delta > 0$

[2]　$E[R_X \mid H_0] = \dfrac{n(2n+1)}{2}$

[3-1]　$P(X_i > y_j) = \begin{cases} 1 & (0 \le y_j \le \delta) \\ 1+\delta-y_j & (\delta < y_j \le 1) \end{cases}$

[3-2]　$P(X_i > Y_j) = \dfrac{1+2\delta-\delta^2}{2}$

[3-3]　$E[R_X \mid H_1] = n^2(1+\delta) + \dfrac{n(1-\delta^2 n)}{2}$

[4]　$1-\Phi\left(z_\alpha - \sqrt{6n}\left(\delta - \dfrac{\delta^2}{2}\right)\right)$

問２

[1]　θ の最尤推定量は $\hat{\theta} = \dfrac{Y_A + Y_B}{10}$ で，実現値は $\hat{\theta} = 1.8$ となる。

[2]　検定統計量の値は $Z = \dfrac{\hat{\theta}_A - \hat{\theta}_B}{\sqrt{\hat{V}[\hat{\theta}_A] + \hat{V}[\hat{\theta}_B]}} \approx 0.226 < 1.96$ なので，有意水準 5%で H_0 は棄却されない。

[3]　θ の事後分布の確率密度関数は $p(\theta \mid y_A, y_B) \propto \theta^{18}\exp(-11\theta)$ であり，これは $\alpha = 19$，$\beta = 11$ のガンマ分布である。

[4]　事後予測分布は負の二項分布 $p(y_C \mid y_A, y_B) = \dfrac{\Gamma(y_C + 19)}{y_C!\,\Gamma(19)}\left(\dfrac{11}{16}\right)^{19}\left(\dfrac{5}{16}\right)^{y_C}$ である。

[5]　事後予測分布の期待値は $E[Y_C] \approx 8.6$ となり，最尤推定値に基づく予測値 $5 \times 1.8 = 9$ より小さい。事前分布 $g(\theta) = \exp(-\theta)$ の平均が 1 で，$\theta < 1$ の確率密度が高いことから，θ が小さく推定されたと考察できる。

問３

[1]　$\lambda_j(t) = \dfrac{f_j(t)}{S(t)}$

[2]　$S_j(t) = P(J=j) - F_j(t)$ であり，$P(J=j) < 1$ より示される。

[3]　m 種類の競合イベントが同時に発生しないという仮定から，微小区間でのイベントの発生確率はいずれか１つのイベントの発生確率の和となり，$\lambda(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \cdots + \lambda_m(t)$ が導かれる。

[4]　$S(t) = \exp[-(\gamma_1 t)^{\alpha_1} - (\gamma_2 t)^{\alpha_2}]$

[5]　$F_1(t)$ への共変量 x の影響は $\lambda_1(t)$ のみではなく他の原因別ハザードを通じても生じることから, 共変量 x の $F_1(t)$ への効果をこのモデルのパラメータ β から評価することは適切ではない。

問４

[1-1]　$\mathrm{FWER} = 1 - (1 - 0.05)^2 = 0.0975$

[1-2]　$\mathrm{FWER} = 1 - \left(1 - \dfrac{0.05}{2}\right)^2 = 0.049375 \approx 0.049$

[1-3]　$(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) = 0.95$

[1-4]　$[(\alpha / 2) \le p_1 \le \alpha]$ かつ $[(\alpha / 2) \le p_2 \le \alpha]$ の領域について Simes 法の棄却域が大きい。

[2-1]　$\mathrm{FWER}(\rho) = 2\alpha - \phi(\rho)$

[2-2]　$\mathrm{FWER}(0) - \mathrm{FWER}(\rho) = \phi(\rho) - \alpha^2$ であり, $\phi(\rho) \ge \alpha^2$ より $\mathrm{FWER}(\rho) \le \mathrm{FWER}(0)$ が示される。

問５

[1]　$E[\tilde{\pi}] = 0.2 + 0.7\pi$,　$V[\tilde{\pi}] = \dfrac{1}{n}(0.2 + 0.7\pi)(0.8 - 0.7\pi)$

[2]　$$\hat{\pi} = \begin{cases} 0 & (m < 0.2n) \\ (m - 0.2n)/(0.7n) & (0.2n \le m \le 0.9n) \\ 1 & (m > 0.9n) \end{cases}$$

[3]　確率は $(1 + \pi)/3$ である。

[4]　$$\breve{\pi} = \begin{cases} 0 & (t < n/3) \\ (3t/n) - 1 & (n/3 \le t \le 2n/3) \\ 1 & (t > 2n/3) \end{cases}$$

[5]　$0 < p < 0.5$ もしくは $0.5 < p < 1$ とする必要があるが，どの値がよいかは，パラメータの推定効率や回答の正直さを勘案すべきで，最適な値はない。