統計検定
Japan Statistical Society Certificate

1級
統計応用

2025 年 11 月 16 日

【注意事項】

1 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2 この問題冊子は，60 ページあります。**3〜13** ページは人文科学，**15〜25** ページは社会科学，**27〜37** ページは理工学，**39〜49** ページは医薬生物学の問題です。

3 選択した分野の問題 5 問から 3 問を選択して，解答しなさい。

4 試験時間は 90 分です。

5 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答冊子の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

6 解答冊子・マークシートの **A** 面には次の項目があるので，それぞれの指示に従い記入あるいは確認しなさい。項目の内容に誤りがある場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

① マークシートの氏名
氏名を記入しなさい。

② マークシートの検定種別と受験番号
受験する検定種別と受験番号を確認しなさい。

③ マークシートの **Web** 合格発表
Web 合格発表について，希望の有無をマークしなさい。

④ 解答冊子表紙の左上に受験番号を記入し，マーク欄の該当する数字を塗りつぶしなさい。

⑤ 問ごと（問 **1**，問 **2**，...）に解答のページを改めなさい。
なお，解答する問の順番（問 **3**，問 **1**，問 **5** など）は問いません。

⑥ 各ページの先頭に受験番号と問題番号を書きなさい。（この冊子裏面の記入例参照）
解答冊子には，最終的な解答だけでなくそれに至る過程も記しなさい。最終的な解答が正しくないときにも点が与えられることがあります。

⑦ 解答冊子の表紙の選択分野欄の選択した分野と，問題番号欄の選択した問題番号をそれぞれ ◯ で囲みなさい（得点欄には何も書かないこと）。（この冊子裏面の記入例参照）

7 51 ページ以降に付表を掲載しています。必要に応じて利用しなさい。

8 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

9 試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

（冊子裏面につづく）

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

人文科学

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

問 1　都市圏のある会社（社員数 $N = 2000$ 名）では，社員の通勤時間を調査した。調査により，家族等との同居世帯の社員と単身世帯の社員では通勤時間が大きく異なることが分かったため，社員を「同居世帯」と「単身世帯」に層別した。表 1 は，各層に含まれる社員の数と社員の比率，層内の通勤時間の平均および標準偏差である。以下の各問に答えよ。ただし，解答の際に有限母集団修正は行わないとする。

表 1：社員の通勤時間に関する基本情報

層	層の社員数（名）	層の社員の比率	層内平均（分）	層内標準偏差（分）
同居世帯 (G_1)	500 (N_1)	0.25 (p_1)	90 (μ_1)	30 (σ_1)
単身世帯 (G_2)	1500 (N_2)	0.75 (p_2)	30 (μ_2)	10 (σ_2)
計	2000 (N)	1.00	-	-

〔1〕　一般に，母集団全体が G_1，G_2 の 2 層からなり，それぞれの層の母集団での大きさを N_1，N_2 とし，比率を $p_1 = N_1/N$，$p_2 = N_2/N$ $(p_1 + p_2 = 1)$ とする。各層の平均と標準偏差をそれぞれ μ_1，μ_2 および σ_1，σ_2 としたとき，母集団全体の母平均 μ と母分散 σ^2 を p_1，p_2，μ_1，μ_2，σ_1，σ_2 を用いて表せ。また，表 1 について，全社員の通勤時間の母平均 μ と母分散 σ^2 の値を具体的に求めよ。

〔2〕　層を区別することなく，全社員 2000 名から非復元単純無作為抽出により 100 名の社員を選び，彼らの通勤時間を $X_1, \ldots, X_{100}$ としたとき，母平均を算術平均 $\bar{X} = \sum_{i=1}^{100} X_i/100$ により推定する。このとき，表 1 について，期待値 $E[\bar{X}]$ と分散 $V[\bar{X}]$ の値を具体的に求めよ。

次に，層化非復元無作為抽出を考える。全部で n 名からなる標本を抽出するとし，各層からの標本サイズをそれぞれ n_1，n_2 $(n_1 + n_2 = n)$ として，通勤時間の期待値 μ の推定量を

$$\tilde{X} = \frac{1}{N}\left(\frac{N_1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i} + \frac{N_2}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}\right) = p_1\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i} + p_2\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}$$

と定義する。ここで，X_{hi} $(i = 1, \ldots, n_h; h = 1, 2)$ は第 h 層から抽出された社員の通勤時間を表す確率変数である。

〔3〕　標本サイズを $n_1 = (N_1/N)n = p_1 n, n_2 = (N_2/N)n = p_2 n$ と層の大きさで比例配分したときの分散 $V[\tilde{X}]$ を p_1，p_2，σ_1，σ_2，n を用いて表せ。また，表 1 の母集団において $n_1 = 25$，$n_2 = 75$ $(n = 100)$ と比例配分したときの分散 $V[\tilde{X}]$ の値を求めよ。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

〔4〕　全体の標本サイズ n が与えられたとき，分散 $V[\tilde{X}]$ を最小にする配分としてネイマン配分が知られている。ネイマン配分は，各層の大きさと層内標準偏差を掛け合わせた数値の比，つまり，$n_1 : n_2 = N_1\sigma_1 : N_2\sigma_2 = p_1\sigma_1 : p_2\sigma_2$ となるように n_1，n_2 を決めるものである。

一般に，ネイマン配分による分散 $V[\tilde{X}]$ を p_1，p_2，σ_1，σ_2，n を用いて表せ。また，表 1 の母集団において $n = 100$ のときのネイマン配分 n_1，n_2 と，そのときの分散 $V[\tilde{X}]$ の値を求めよ。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

問 2　ある大学では，卒業のための最終試験を行っている。現在,「英語」と「数学」の試験を行い，それら 2 科目の平均が 40 点以上でないと卒業できない。大学では，今後「情報」の試験を含めるかなどの議論をしている。会話に出てくる 3 つの試験「英語」,「数学」,「情報」の得点をそれぞれ X，Y，Z とし，次の仮定を置く。以下の各問に答えよ。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \text{は 3 変量正規分布 } N_3\left(\begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix}, 10^2 \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 1 & 0.8 \\ 0.2 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}\right) \text{に従う}$$

〔1〕　次の T 教授と K 准教授の会話にある【ア】〜【オ】に入る数値を，それに至る過程を含め記述せよ。

T：　うちはデータサイエンスを売りにしているのだから，最終試験に「情報」の試験を追加して 3 科目にしたいのだけどどうだろうか？

K：　2 科目試験の現状と，3 科目試験にした時を比較する必要があると思いますね。

T：　今の状況をまとめてもらえないだろうか？

K：　2 科目試験の平均の期待値 $E[(X+Y)/2]$ が 50 で，分散 $V[(X+Y)/2]$ が【ア】ですね。40 点以上が合格なので，合格率は【イ】と計算できます。

T：　3 科目だとどうなる？

K：　3 科目試験の平均の期待値 $E[(X+Y+Z)/3]$ が 50 で，分散 $V[(X+Y+Z)/3]$ が【ウ】ですね。40 点以上を合格とすると，合格率は【エ】と計算できます。

T：　そうなんだ。次回の会議にあげてみよう。

K：　3 科目の単なる平均ではなく，各科目の重みを変えたり，各科目に合格最低点を設定したりすることも考えられます。最終試験合格率の目標値はいくらですか？

T：　目標値は 9 割だけど。

K：　わかりました。複雑かもしれないけれど目標値が 9 割になる合格基準を作って，それが本当に合格率 9 割になるかどうかをシミュレーションで確かめてみましょう。シミュレーションはコレスキー分解を使ったプログラムを作成して実行します。合格率の標準誤差が 0.01 以下になるようにするには，シミュレーションの試行回数は最低 【オ】 回とすればいいですね。

T：　えっ?? とにかく，ありがとう。たのむよ。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

〔2〕　上問〔1〕の会話に出てきたコレスキー分解を用いた乱数発生は，次のような仕組みの手法である。文中の【カ】～【コ】の数値を，それに至る過程を含め記述せよ。

k 次正定値行列 $A = \{a_{ij}\}$ は下三角行列 $C = \{c_{ij}\}$ $(i, j = 1, \ldots, k)$ とその転置行列 C^T の積に分解できる。この $A = CC^T$ の分解をコレスキー分解という。ここで，上付き添え字の ^{T} は行列の転置を表す。この下三角行列 C を用いて次のような変換を考える。ただし，$c_{ii} > 0$ とする。

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix} = C\boldsymbol{w} + \boldsymbol{\mu}$$

ここで，w_i $(i = 1, \ldots, k)$ を平均 0，標準偏差 1 の正規乱数とすると，$\boldsymbol{V}$ は平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}$，分散共分散行列 A をもつ k 次元正規乱数となる。

つまり，K 准教授が必要とするシミュレーションの 3 次元乱数発生には，次の式を考えればよい。

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 10 \times \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 1 & 0.8 \\ 0.2 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}$$

これより，$b_{11} = 1$，$b_{21} =$【カ】，$b_{22} =$【キ】，$b_{31} =$【ク】，$b_{32} =$【ケ】，$b_{33} =$【コ】となる。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

問 3　ある店は客の印象を調査するため,「ブランド」,「接客」,「品揃え」,「味」,「価格」の 5 項目について，1（低評価）～ 5（高評価）で評価するアンケートを実施した。得られた観測値を平均 0，分散 1 に標準化し，2 つの共通因子を想定した探索的因子分析を行った。表 1 は共通因子が互いに無相関であるという仮定のもとでの最初の出力結果，表 2 と表 3 はそれぞれ直交回転後および斜交回転後の出力結果で，第 1 因子負荷量，第 2 因子負荷量，共通性の値を示した。以下の各問に答えよ。

表 1：最初の出力結果

変数（項目）	因子 1	因子 2	共通性
ブランド	0.80	0.40	(A)
接客	0.40	0.50	0.41
品揃え	0.90	0.10	0.82
味	0.90	−0.20	0.85
価格	0.70	−0.50	0.74

表 2：直交回転

変数（項目）	因子 1	因子 2	共通性
ブランド	0.40	(B)	(A)
接客	0.02	0.64	0.41
品揃え	0.66	0.62	0.82
味	0.84	0.38	0.85
価格	0.86	0.02	0.74

表 3：斜交回転

変数（項目）	因子 1	因子 2	共通性
ブランド	0.40	0.656	(A)
接客	0.02	0.632	0.41
品揃え	0.66	0.410	0.82
味	0.84	0.171	0.85
価格	0.86	0.001	0.74

〔1〕　表 1 の (A) の値を求めよ。また，表 1 の 2 因子モデルのもとで，変数「接客」と因子 1 の間の相関係数，および変数「接客」と変数「品揃え」の間の相関係数を求めよ。

〔2〕　表 1 に関して，因子 1 と因子 2 のそれぞれの寄与率を求めよ。

〔3〕　表 2 の (B) の値を求めよ。ここで，表 1 と表 2 の (A) には同じ値が入る。

〔4〕　表 3 に関して，因子 1 と因子 2 の間の相関係数を，変数「品揃え」の値を用いて求めよ。

〔5〕　表 3 に基づく 2 因子の因子分析（斜交回転）のパス図を示し，因子負荷量，因子間相関および独自因子の分散に対する推定値をすべて付記せよ。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

問 4　ある大学の理系学科では，基礎教養科目として，1 年次に線形代数と微分積分を，2 年次に統計学を履修するよう，カリキュラムで定めている。教務委員の A さんは，線形代数と微分積分の期末試験の点数から，翌年の統計学の期末試験の点数を予測しようとした。以下では，各科目の点数を，それぞれ平均 0，分散 1 に標準化し，n 人の線形代数の標準化得点 $\{x_{i1}\}_{i=1}^n$，微分積分の標準化得点 $\{x_{i2}\}_{i=1}^n$，統計学の標準化得点 $\{y_i\}_{i=1}^n$ を列ベクトルで $\boldsymbol{x}_1 = (x_{11}, \ldots, x_{n1})^T$，$\boldsymbol{x}_2 = (x_{12}, \ldots, x_{n2})^T$，$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ と表す（なお，上付き添え字 ^{T} はベクトルもしくは行列の転置を表す）。また，$\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{x}_2$ および $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の間の標本相関係数をそれぞれ r_{y1}，r_{y2}，r_{12} とする。

ある学年の 30 人の学生について標本相関係数は

$$r_{12} = 0.8965, \quad r_{y1} = 0.6013, \quad r_{y2} = 0.6996$$

であった。A さんは，このデータに対して，$\boldsymbol{y}$ を目的変数，$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ を説明変数とする切片のない重回帰モデル

$$\boldsymbol{y} = \beta_1 \boldsymbol{x}_1 + \beta_2 \boldsymbol{x}_2$$

を考えた。この重回帰モデルの母数 β_1, β_2 の最小二乗推定値を統計ソフトウェアで計算したところ，出力の一部は

	推定値	標準誤差	t 値	両側 p 値
β_1	-0.1323	0.3038	-0.435	0.6666
β_2	0.8182	0.3038	2.693	0.0118

となった。以下の各問に答えよ。

〔1〕　この計算結果に基づき，標準化前の線形代数の得点が 65 点，微分積分の得点が 70 点の学生の，標準化前の統計学の得点を予測せよ。ただし，この学年の 30 人の学生について，線形代数は平均 60 点，標準偏差 20 点，微分積分は平均 68 点，標準偏差 10 点，統計学は平均 70 点，標準偏差 15 点とする。

推定の結果を見た A さんは，統計学と線形代数には正の相関があるにも関わらず，偏回帰係数 β_1 の推定値が負になったことを不思議に思った。それを同僚の統計教員の B さんに質問したところ，「偏回帰係数 β_1 は，説明変数 $\boldsymbol{x}_1$ の目的変数 $\boldsymbol{y}$ への寄与の大きさを単独で表すのではなく，説明変数 $\boldsymbol{x}_2$ の影響を取り除いた上での寄与の大きさを表す量です。実際，$\boldsymbol{x}_1$ を $\boldsymbol{x}_2$ で説明する切片のない単回帰モデルを考えて，その残差ベクトルを $\boldsymbol{z}$ とすれば，$\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{z}$ で説明する切片のない単回帰モデルの回帰係数の推定値は，$\hat{\beta}_1 = -0.1323$ に一致します」という説明を受けた。実際に A さんが，この単回帰モデル

$$\boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{z}$$

の推定を統計ソフトウェアで行ったところ，出力の一部は

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

	推定値	標準誤差	t 値	両側 p 値
α	-0.1323	0.4185	-0.316	0.754

となり，確かに，α の最小二乗推定値は偏回帰係数 β_1 の最小二乗推定値と一致することが確認できた。一方で A さんは，推定値が同じなのに，標準誤差，t 値，検定結果が異なることを不思議に思った。

〔2〕 β_1 の最小二乗推定値 $\hat{\beta}_1$ を，r_{12}，r_{y1}，r_{y2} を用いて表せ。

〔3〕 $\boldsymbol{z}$ を，$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，r_{12} で表せ。また，$\boldsymbol{z}$ の標本分散 s_z^2 と，$\boldsymbol{z}$ と $\boldsymbol{y}$ の標本共分散 s_{yz} を，r_{12}，r_{y1}，r_{y2} を用いて表せ。ただし，標本分散と標本共分散の分母はいずれも n とする。

〔4〕 α の最小二乗推定値 $\hat{\alpha}$ を s_z^2，s_{yz} を用いて表せ。これに上問〔3〕の結果を代入し，β_1 の最小二乗推定値と一致することを確かめよ。

〔5〕 $\hat{\alpha}$ の標準誤差を，r_{12}，r_{y1}，r_{y2}，n を用いて表せ。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

問 5　ある母集団において，年収が 500 万円以上である人の割合 π を対面調査で推定したい。このとき，直接調査法と確率調査法が考えられる。以下の各問に答えよ。

・直接調査法：母集団からランダムに選んだ人に対し，調査者が対面で
　質問 A「あなたの年収は 500 万円以上ですか？」
と質問し，回答者の YES あるいは NO の回答を得る。しかし，年収はプライバシーにかかわることから，この調査法では正直に答えない人もいると想定される。

〔1〕　母集団には，年収を高く見せたい人と低く見せたい人の両方が一定割合で存在する。直接調査法で，年収 500 万円以上の人の中で質問 A に NO と答える人の割合を h_1 とし，年収 500 万円未満の人の中で質問 A に YES と答える人の割合を h_2 と置く。ここで，h_1 と h_2 はそれぞれの年収カテゴリーの中での条件付きの割合であることに注意する。なお，h_1 と h_2 は過去の調査から既知であると仮定する。

　具体的に $h_1 = 0.1$，$h_2 = 0.2$ のとき，母集団からランダムに選んだ n 人を調査して，その中で m 人が YES と答えたとする。この場合の π の推定量 $\tilde{\pi} = m/n$ の期待値と分散を求めよ。

〔2〕　上問〔1〕の設定 $(h_1 = 0.1,\ h_2 = 0.2)$ で，n 人中 m 人が YES と回答したときの π の最尤推定量 $\hat{\pi}$ を求めよ。

　回答者に正直に答えてもらうために次のような工夫をする。
・確率調査法：確率 p で記号 a を，確率 $1-p$ で記号 b を出力する何らかの器具（例えばサイコロや乱数表）を用意し，回答者はこの器具を調査者に見えないように適用して，a が出たら上記の質問 A に回答する。そして，b が出たら
　質問 B「あなたの年収は 500 万円未満ですか？」
に YES あるいは NO で回答する。
　確率調査法では，調査者には回答者の回答が質問 A もしくは質問 B のどちらへの回答かは分からないことから，回答者は正直に回答すると仮定する。

〔3〕　確率調査法で，回答者は，サイコロを 1 回振って 1 から 4 のいずれかの目が出たときに質問 A に答え，5，6 の目が出たときは質問 B に答える。すなわち，質問 A に答える確率は $p = 2/3$ であり，質問 B に答える確率は $1/3$ である。このとき，母集団からランダムに選んだ 1 人の回答者が YES と答える確率はいくらか。

〔4〕　上問〔3〕と同じく $p = 2/3$ として，n 人中 t 人が YES と回答したときの π の最尤推定量 $\breve{\pi}$ を求めよ。

〔5〕　上問〔3〕,〔4〕では $p = 2/3$ とした。p の値はどのような観点で選択したらよいかを述べよ。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

社会科学

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

問 1　都市圏のある会社（社員数 $N = 2000$ 名）では，社員の通勤時間を調査した。調査により，家族等との同居世帯の社員と単身世帯の社員では通勤時間が大きく異なることが分かったため，社員を「同居世帯」と「単身世帯」に層別した。表 1 は，各層に含まれる社員の数と社員の比率，層内の通勤時間の平均および標準偏差である。以下の各問に答えよ。ただし，解答の際に有限母集団修正は行わないとする。

表 1：社員の通勤時間に関する基本情報

層	層の社員数（名）	層の社員の比率	層内平均（分）	層内標準偏差（分）
同居世帯 (G_1)	500 (N_1)	0.25 (p_1)	90 (μ_1)	30 (σ_1)
単身世帯 (G_2)	1500 (N_2)	0.75 (p_2)	30 (μ_2)	10 (σ_2)
計	2000 (N)	1.00	-	-

〔1〕　一般に，母集団全体が G_1，G_2 の 2 層からなり，それぞれの層の母集団での大きさを N_1，N_2 とし，比率を $p_1 = N_1/N$，$p_2 = N_2/N$ $(p_1 + p_2 = 1)$ とする。各層の平均と標準偏差をそれぞれ μ_1，μ_2 および σ_1，σ_2 としたとき，母集団全体の母平均 μ と母分散 σ^2 を p_1，p_2，μ_1，μ_2，σ_1，σ_2 を用いて表せ。また，表 1 について，全社員の通勤時間の母平均 μ と母分散 σ^2 の値を具体的に求めよ。

〔2〕　層を区別することなく，全社員 2000 名から非復元単純無作為抽出により 100 名の社員を選び，彼らの通勤時間を $X_1, \ldots, X_{100}$ としたとき，母平均を算術平均 $\bar{X} = \sum_{i=1}^{100} X_i/100$ により推定する。このとき，表 1 について，期待値 $E[\bar{X}]$ と分散 $V[\bar{X}]$ の値を具体的に求めよ。

次に，層化非復元無作為抽出を考える。全部で n 名からなる標本を抽出するとし，各層からの標本サイズをそれぞれ n_1，n_2 $(n_1 + n_2 = n)$ として，通勤時間の期待値 μ の推定量を

$$\tilde{X} = \frac{1}{N}\left(\frac{N_1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i} + \frac{N_2}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}\right) = p_1\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i} + p_2\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}$$

と定義する。ここで，X_{hi} $(i = 1, \ldots, n_h; h = 1, 2)$ は第 h 層から抽出された社員の通勤時間を表す確率変数である。

〔3〕　標本サイズを $n_1 = (N_1/N)n = p_1 n, n_2 = (N_2/N)n = p_2 n$ と層の大きさで比例配分したときの分散 $V[\tilde{X}]$ を p_1，p_2，σ_1，σ_2，n を用いて表せ。また，表 1 の母集団において $n_1 = 25$，$n_2 = 75$ $(n = 100)$ と比例配分したときの分散 $V[\tilde{X}]$ の値を求めよ。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

〔4〕　全体の標本サイズ n が与えられたとき，分散 $V[\tilde{X}]$ を最小にする配分としてネイマン配分が知られている。ネイマン配分は，各層の大きさと層内標準偏差を掛け合わせた数値の比，つまり，$n_1 : n_2 = N_1\sigma_1 : N_2\sigma_2 = p_1\sigma_1 : p_2\sigma_2$ となるように n_1，n_2 を決めるものである。

一般に，ネイマン配分による分散 $V[\tilde{X}]$ を p_1，p_2，σ_1，σ_2，n を用いて表せ。また，表 1 の母集団において $n = 100$ のときのネイマン配分 n_1，n_2 と，そのときの分散 $V[\tilde{X}]$ の値を求めよ。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

問 2　イベント会社の A さんは，雪が降るとイベントの集客数に影響が出ることから，降雪日の頻度を調べた。表 1 は，東京都で 3cm 以上の降雪があった日数を年ごとに数えた 30 年分のデータである。以下の各問に答えよ。

なお，確率変数 Y がパラメータ λ のポアソン分布（$Po(\lambda)$ と書く）に従うとき，その確率関数は

$$p(y) = P(Y = y) = \frac{\lambda^y}{y!}e^{-\lambda} \quad (y = 0, 1, 2, \dots) \tag{1}$$

である。

表 1：東京都の 3cm 以上の降雪日数

年	日数	年	日数	年	日数
1995	0	2005	1	2015	1
1996	2	2006	1	2016	1
1997	0	2007	0	2017	0
1998	4	2008	1	2018	1
1999	0	2009	0	2019	0
2000	0	2010	0	2020	0
2001	1	2011	0	2021	0
2002	0	2012	1	2022	1
2003	1	2013	1	2023	0
2004	0	2014	3	2024	1

出典：気象庁ホームページを基に作成

〔1〕　一般に，$y_1, \dots, y_n$ を $Po(\lambda)$ からの n 個の独立な観測値とするとき，それらを元に λ の最尤推定値を導出せよ。また，表 1 のデータからその値を計算せよ。

〔2〕　式 (1) の確率関数が y の単調減少関数，すなわち $y_1 < y_2$ のとき $p(y_1) > p(y_2)$ となるための λ の条件を求めよ。

A さんの上司の B さんは，3cm 以上の降雪量が 0 日の年と 1 日以上の年の確率を別々にモデル化したらどうかと提案した。それを受けて A さんは，

$$P(Y = 0) = p \tag{2}$$

$$P(Y = y \mid Y \geq 1) = C(\tau)\frac{\tau^y}{y!}e^{-\tau} \quad (y = 1, 2, \dots) \tag{3}$$

としたモデルを想定した。ここで，$C(\tau)$ は基準化定数である。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

〔3〕　$C(\tau)$ を明示的に示し，式 (3) の確率が y の単調減少関数となるための τ の条件を求めよ。

〔4〕　式 (3) における Y の条件付き期待値 $E[Y \mid Y \geq 1]$ を求めよ。

〔5〕　一般に，$y_1, \ldots, y_m$ を確率関数が式 (3) で表される分布からの独立な m 個の観測値とし，それらの標本平均を $\bar{y} = \sum_{i=1}^{m} y_i/m$ とする。パラメータ τ の最尤推定値 $\hat{\tau}$ の満たす関数を $\bar{y} = g(\hat{\tau})$ と置くとき，$g(\hat{\tau})$ を求めよ。また，その結果を用いて，$\hat{\tau}$ を求めるアルゴリズムを 1 つ示せ。

ちなみに，A さんが自分で工夫したアルゴリズムを用いたところ $\hat{\tau} = 0.7154$ となった。

〔6〕　表 1 のデータから，モデル (2) の p の推定値 $\hat{p}$ を求めよ。この $\hat{p}$ が $Po(\lambda)$ のもとで求めた $P(Y = 0)$ の推定値と有意に異なるかどうかを調べる手順を，帰無仮説と対立仮説を明示した上で示せ。手順のみで実際に検定統計量の計算式や数値は示さないでよい。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

問 3　ある健康保険組合では，被保険者全体の集団から標本サイズ $n = 100$（人）を無作為に抽出し，ある年の年間医療費 y（千円）とその前年に計測した「不健康指数」x に関するデータを集めた。ここで「不健康指数」は，この健康保険組合が内部用に作成した指標であり，各個人の健診データや人口属性データなどから計算される不健康さを表す指標である。以下の各問に答えよ。

〔1〕　この健康保険組合のデータ分析部門に属する A さんは，不健康指数 x に応じた医療費 y の予測のために，回帰モデル

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

をデータに当てはめることを考えた。ここで，(x_i, y_i) は i 番目の人の (x, y) の値であり，ε_i は誤差項で互いに独立に平均 0，分散 σ^2 の正規分布に従うと仮定する。また，ε_i の分布は x_i に依存しないものとする。

このデータから，x の標本平均は $\bar{x} = 50$ で標本分散は $s_x^2 = 20^2$，y の標本平均は $\bar{y} = 30$ で標本分散は $s_y^2 = 30^2$，x と y の間の標本共分散は $s_{xy} = 200$ と計算された。ただし，標本分散と標本共分散における偏差平方和および偏差積和の除数は $n = 100$ とする。このとき，式 (1) の α と β の最小二乗推定値を求めよ。

〔2〕　$n = 100$（人）の標本データのうち，50 人の医療費 y の値は 0 であった。A さんは $y = 0$ であるデータを除いた残りの 50 人のデータを用いてモデル (1) を推定することにした。この場合の α と β の最小二乗推定値を求めよ。ただし，上問〔1〕で述べた統計量の値に加え，y の値が正である 50 人の x の標本平均は 60 で，標本分散は上問〔1〕と同じく 20^2 であるとする（なお，標本分散の偏差平方和の除数は 50）。

以下では，上問〔1〕および〔2〕で与えた統計量の具体的な数値とは関係なく解答せよ。なお，標準正規分布 $N(0, 1)$ の確率密度関数は $\varphi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$ である。

〔3〕　A さんは，モデル (1) の代わりに，以下の新たなモデルを考えることにした。

$$y_i = \begin{cases} \eta_i & (\eta_i > 0) \\ 0 & (\eta_i \leq 0) \end{cases} \tag{2}$$

$$\eta_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

ここで，η_i は観測できない潜在変数である。このモデルでは，y_i ではなく η_i が式 (1) の右辺に従うとされる。ただし，以下の各問では誤差項 ε_i の分散は $\sigma^2 = 1$ と与えられているものとする。

モデル (2)，(3) において，$x = 50$ のとき医療費 y が正となる確率が 0.5 であり，$x = 60$ のとき医療費 y が正となる確率が 0.95 であるための，式 (3) の α と β の値を求めよ。ただし，標準正規分布 $N(0, 1)$ の上側 5% 点は 1.645 とする。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

〔4〕　上問〔3〕と同じく，モデル (2)，(3) が成立し，$\sigma^2 = 1$ とする。このとき，$\alpha + \beta x = 0$ となる x に対応する医療費 y の期待値を求めよ。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

問 4　ある金融資産の時点 $t-1$ から時点 t までの期間（例えば 1 か月）の収益率 $\{y_t\}$ の時系列モデルとして，

$$y_t = \mu + \sigma_t \varepsilon_t$$

を考える。ここで，μ は定数で，σ_t および ε_t は以下のように仮定される。

- $\{\varepsilon_t\}$ は互いに独立に標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。また，各 t について，ε_t はそれ以前の収益率 $\{y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots\}$ と独立である。
- σ_t^2 は y_{t-1} の関数として次のように表される。

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 (y_{t-1} - \mu)^2$$

  ここで，β_0 と β_1 は定数である。また，σ_t^2 は y_{t-1} の関数であるので確率変数として扱われる。

以下では，$\mu = 0.4$，$\beta_0 = 0.14$，$\beta_1 = 0.5$ とする。$\{y_t\}$ の定常性と $E[(y_t - \mu)^4] < \infty$ の性質が成立しているとして，以下の各問に答えよ。

なお，$N(0,1)$ の上側 $100\alpha\%$ 点 z_α の値は表 1 で与えられる。

表 1：$N(0,1)$ の上側 $100\alpha\%$ 点

α	0.005	0.01	0.025	0.05
z_α	2.576	2.326	1.960	1.645

〔1〕　$\{y_t\}$ は無相関な時系列であることを示せ。

〔2〕　y_t の尖度（平均 0，分散 1 に標準化した確率変数の 4 次の中心モーメント）は 3 より大きいことを示せ。

〔3〕　$\{(y_t - \mu)^2\}$ の 1 次の自己相関係数を計算せよ。

〔4〕　$y_t = 0.2$ を所与とする y_{t+1} の条件付き分布を求めよ。

〔5〕　時点 t でこの金融資産に 100 万円投資したとし，時点 $t+1$ におけるこの投資の損失を $L_{t+1} = 100 - 100\exp(y_{t+1})$ と定義する。$y_t = 0.2$ を所与とするとき，損失がある定数 c を超える確率 $P(L_{t+1} > c \mid y_t = 0.2)$ を考える。もし c が $P(L_{t+1} > c \mid y_t = 0.2) = 0.01$ を満たせば，c の値は 1% の稀な場合を除いた「予想最大損失」と解釈できる。この c の値を $c = 100 - 100\exp(B)$ という形で表すとき，B の値を求めよ。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

問 5　ある母集団において，年収が 500 万円以上である人の割合 π を対面調査で推定したい。このとき，直接調査法と確率調査法が考えられる。以下の各問に答えよ。

・直接調査法：母集団からランダムに選んだ人に対し，調査者が対面で
　質問 A「あなたの年収は 500 万円以上ですか？」
と質問し，回答者の YES あるいは NO の回答を得る。しかし，年収はプライバシーにかかわることから，この調査法では正直に答えない人もいると想定される。

〔1〕　母集団には，年収を高く見せたい人と低く見せたい人の両方が一定割合で存在する。直接調査法で，年収 500 万円以上の人の中で質問 A に NO と答える人の割合を h_1 とし，年収 500 万円未満の人の中で質問 A に YES と答える人の割合を h_2 と置く。ここで，h_1 と h_2 はそれぞれの年収カテゴリーの中での条件付きの割合であることに注意する。なお，h_1 と h_2 は過去の調査から既知であると仮定する。

　具体的に $h_1 = 0.1$，$h_2 = 0.2$ のとき，母集団からランダムに選んだ n 人を調査して，その中で m 人が YES と答えたとする。この場合の π の推定量 $\tilde{\pi} = m/n$ の期待値と分散を求めよ。

〔2〕　上問〔1〕の設定 $(h_1 = 0.1,\ h_2 = 0.2)$ で，n 人中 m 人が YES と回答したときの π の最尤推定量 $\hat{\pi}$ を求めよ。

　回答者に正直に答えてもらうために次のような工夫をする。
・確率調査法：確率 p で記号 a を，確率 $1-p$ で記号 b を出力する何らかの器具（例えばサイコロや乱数表）を用意し，回答者はこの器具を調査者に見えないように適用して，a が出たら上記の質問 A に回答する。そして，b が出たら
　質問 B「あなたの年収は 500 万円未満ですか？」
に YES あるいは NO で回答する。
　確率調査法では，調査者には回答者の回答が質問 A もしくは質問 B のどちらへの回答かは分からないことから，回答者は正直に回答すると仮定する。

〔3〕　確率調査法で，回答者は，サイコロを 1 回振って 1 から 4 のいずれかの目が出たときに質問 A に答え，5，6 の目が出たときは質問 B に答える。すなわち，質問 A に答える確率は $p = 2/3$ であり，質問 B に答える確率は $1/3$ である。このとき，母集団からランダムに選んだ 1 人の回答者が YES と答える確率はいくらか。

〔4〕　上問〔3〕と同じく $p = 2/3$ として，n 人中 t 人が YES と回答したときの π の最尤推定量 $\check{\pi}$ を求めよ。

〔5〕　上問〔3〕,〔4〕では $p = 2/3$ とした。p の値はどのような観点で選択したらよいかを述べよ。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

理工学

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

問 1　ある工場の製造工程では，長さの規格値が 10.00mm と定められた機械部品を製造している。以下の各問に答えよ。

〔1〕　この工場では，製造工程が安定状態にあるかどうかを，1 日あたり $n = 4$ 個の機械部品を無作為に抽出して，$\bar{X} - R$ 管理図を作成することで評価している。ただし，この工場が作成する $\bar{X} - R$ 管理図では，管理線（中心線と管理限界線）は観測値から計算し，管理限界線は「3 シグマ法」で計算している。例えば，ある月の 30 日分の観測値について，機械部品の日平均を $\bar{x}_i$，日範囲を r_i $(i = 1, \ldots, 30)$ とし，それらの平均を $\bar{\bar{x}}$，$\bar{r}$ とすれば，$\bar{X}$-管理図の中心線は $\bar{\bar{x}}$，R-管理図の中心線は $\bar{r}$ である。また，$\bar{X}$-管理図の下側管理限界線 LCL と上側管理限界線 UCL はそれぞれ

$$\mathrm{LCL} = \bar{\bar{x}} - A\bar{r}, \quad \mathrm{UCL} = \bar{\bar{x}} + A\bar{r}$$

で計算される。ここで，A は n から定まる定数である。

〔1-1〕　$\bar{X} - R$ 管理図の目的を説明した以下の文章の空欄（それぞれ 5 文字以内）を答えよ。

$\bar{X}$-管理図は，［ア］の変動が管理状態にあるかを確認するために作成する。
R-管理図は，［イ］の変動が管理状態にあるかを確認するために作成する。

〔1-2〕　分散が σ^2 の正規分布からのサイズ $n = 4$ の独立な標本 $X_1, \ldots, X_4$ について，その範囲を $R = \max_{1 \le i \le 4} X_i - \min_{1 \le i \le 4} X_i$ とおけば，R の期待値は σ に比例することが知られており，およそ $E(R) = 2.059 \times \sigma$ となる。このことを用いて，A の値を求めよ。

〔2〕　この機械部品の長さの観測値は正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの独立標本とみなせるとする。長さの規格上限と規格下限がそれぞれ $S_U = 10.10$, $S_L = 9.90$ と定められているとし，長さが $[S_L, S_U]$ に含まれない機械部品は不良品とみなす。2 種類の工程能力指数を

$$C_p = \frac{S_U - S_L}{6\sigma}, \quad C_{pk} = \min\left(\frac{\mu - S_L}{3\sigma}, \frac{S_U - \mu}{3\sigma}\right)$$

と定義する。工程能力指数が 1.33 以上であれば「工程能力あり」，1.00 未満であれば「工程能力なし」というのが，一般的な評価基準である。

〔2-1〕　$C_p = 1$ であるとき，不良率が最小となるときの μ を S_L, S_U で表せ。また，そのときの不良率を求めよ。

〔2-2〕　$C_{pk} = 1$ であるとき，不良率が最大となるときの μ を S_L, S_U で表せ。また，そのときの不良率を求めよ。

〔2-3〕　サイズ $n = 20$ の標本について計算された不偏標本分散が $s^2 = 0.00085$ のとき，C_p の点推定値

$$\hat{C}_p = \frac{S_U - S_L}{6\sqrt{s^2}}$$

を計算し，その信頼係数 95% の両側信頼区間を求めよ。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

問 2　ある建設会社では，アンカーボルト（構造物の土台を固定するためのボルト）の劣化具合を 3 つの状態に分類し，毎年の検査によって劣化予測を行っている。状態は A, B, C の 3 段階あり，A は良好で，B はやや劣化，C は劣化している状態を表す。年 t における状態を X_t $(t = 1, 2, \ldots)$ とおく。X_t はマルコフ連鎖に従い，その推移確率

$$P(X_{t+1} = w | X_t = v) \quad (v, w \in \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\})$$

は以下のように表されることが経験的に分かっているという。

		X_{t+1}		
		A	B	C
X_t	A	0.95	0.04	0.01
	B	0	0.95	0.05
	C	0	0	1

以下の各問に答えよ。

〔1〕　現在の状態が A であるとき，2 年後の状態が A である確率を求めよ。

〔2〕　現在の状態が A であるとき，3 年後の状態が B である確率を求めよ。

〔3〕　推移確率行列を

$$P = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.04 & 0.01 \\ 0 & 0.95 & 0.05 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおき，各成分の単位ベクトルを

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおく。現在の状態が A であるとき，10 年後の状態が C である確率を $P, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を用いて表せ。

〔4〕　この会社の現場で働く社員から，上記の推移確率の値では劣化を過小に見積もっているのではないかという声が上がった。そこで会社の分析部では，過去の実績からモデルを作り直すことを検討している。ある年において状態が A，B だったアンカーボルトからそれぞれ無作為に 200 箇所，150 箇所抽出し，翌年の検査結果（度数）をまとめたところ以下のようになった。

		翌年の状態		
		A	B	C
ある年の状態	A	185	10	5
	B	0	129	21

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

いま推移確率行列として

$$\begin{pmatrix} 1-\theta_1-\theta_2 & \theta_1 & \theta_2 \\ 0 & 1-\theta_3 & \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

というモデルを考える。ここで $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ は未知パラメータである。

〔4-1〕　過去の検査結果に基づく $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ の最尤推定値を求めよ。

〔4-2〕　帰無仮説を $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0.04, 0.01, 0.05)$，対立仮説を $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \neq (0.04, 0.01, 0.05)$ とする尤度比検定を行いたい。尤度比検定統計量と，自由度を求めよ。ただし，尤度比検定統計量は漸近的にカイ二乗分布に従う形にすること。尤度比検定統計量の値を最後まで計算する必要はなく，自然対数の値は小数に直さなくてもよい。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

問 3　ある大学の理系学科では，基礎教養科目として，1 年次に線形代数と微分積分を，2 年次に統計学を履修するよう，カリキュラムで定めている。教務委員の A さんは，線形代数と微分積分の期末試験の点数から，翌年の統計学の期末試験の点数を予測しようとした。以下では，各科目の点数を，それぞれ平均 0，分散 1 に標準化し，n 人の線形代数の標準化得点 $\{x_{i1}\}_{i=1}^n$，微分積分の標準化得点 $\{x_{i2}\}_{i=1}^n$，統計学の標準化得点 $\{y_i\}_{i=1}^n$ を列ベクトルで $\boldsymbol{x}_1 = (x_{11}, \ldots, x_{n1})^T$，$\boldsymbol{x}_2 = (x_{12}, \ldots, x_{n2})^T$，$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ と表す（なお，上付き添え字 ^{T} はベクトルもしくは行列の転置を表す）。また，$\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{x}_2$ および $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の間の標本相関係数をそれぞれ r_{y1}，r_{y2}，r_{12} とする。

ある学年の 30 人の学生について標本相関係数は

$$r_{12} = 0.8965, \quad r_{y1} = 0.6013, \quad r_{y2} = 0.6996$$

であった。A さんは，このデータに対して，$\boldsymbol{y}$ を目的変数，$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ を説明変数とする切片のない重回帰モデル

$$\boldsymbol{y} = \beta_1 \boldsymbol{x}_1 + \beta_2 \boldsymbol{x}_2$$

を考えた。この重回帰モデルの母数 β_1, β_2 の最小二乗推定値を統計ソフトウェアで計算したところ，出力の一部は

	推定値	標準誤差	t 値	両側 p 値
β_1	-0.1323	0.3038	-0.435	0.6666
β_2	0.8182	0.3038	2.693	0.0118

となった。以下の各問に答えよ。

〔1〕　この計算結果に基づき，標準化前の線形代数の得点が 65 点，微分積分の得点が 70 点の学生の，標準化前の統計学の得点を予測せよ。ただし，この学年の 30 人の学生について，線形代数は平均 60 点，標準偏差 20 点，微分積分は平均 68 点，標準偏差 10 点，統計学は平均 70 点，標準偏差 15 点とする。

推定の結果を見た A さんは，統計学と線形代数には正の相関があるにも関わらず，偏回帰係数 β_1 の推定値が負になったことを不思議に思った。それを同僚の統計教員の B さんに質問したところ，「偏回帰係数 β_1 は，説明変数 $\boldsymbol{x}_1$ の目的変数 $\boldsymbol{y}$ への寄与の大きさを単独で表すのではなく，説明変数 $\boldsymbol{x}_2$ の影響を取り除いた上での寄与の大きさを表す量です。実際，$\boldsymbol{x}_1$ を $\boldsymbol{x}_2$ で説明する切片のない単回帰モデルを考えて，その残差ベクトルを $\boldsymbol{z}$ とすれば，$\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{z}$ で説明する切片のない単回帰モデルの回帰係数の推定値は，$\hat{\beta}_1 = -0.1323$ に一致します」という説明を受けた。実際に A さんが，この単回帰モデル

$$\boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{z}$$

の推定を統計ソフトウェアで行ったところ，出力の一部は

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

	推定値	標準誤差	t 値	両側 p 値
α	-0.1323	0.4185	-0.316	0.754

となり，確かに，α の最小二乗推定値は偏回帰係数 β_1 の最小二乗推定値と一致することが確認できた。一方で A さんは，推定値が同じなのに，標準誤差，t 値，検定結果が異なることを不思議に思った。

〔2〕 β_1 の最小二乗推定値 $\hat{\beta}_1$ を，r_{12}，r_{y1}，r_{y2} を用いて表せ。

〔3〕 $\boldsymbol{z}$ を，$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，r_{12} で表せ。また，$\boldsymbol{z}$ の標本分散 s_z^2 と，$\boldsymbol{z}$ と $\boldsymbol{y}$ の標本共分散 s_{yz} を，r_{12}，r_{y1}，r_{y2} を用いて表せ。ただし，標本分散と標本共分散の分母はいずれも n とする。

〔4〕 α の最小二乗推定値 $\hat{\alpha}$ を s_z^2，s_{yz} を用いて表せ。これに上問〔3〕の結果を代入し，β_1 の最小二乗推定値と一致することを確かめよ。

〔5〕 $\hat{\alpha}$ の標準誤差を，r_{12}，r_{y1}，r_{y2}，n を用いて表せ。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

問 4　ある職場で，社員の 2 年間の平均残業時間を半期ごとに集計したところ，一昨年の上半期（y_1），一昨年の下半期（y_2），昨年の上半期（y_3），昨年の下半期（y_4）のデータについて

$$y_1 + y_2 < y_3 + y_4, \quad y_1 > y_2, \quad y_3 > y_4$$

の関係があった。人事労務課の A さんは，一昨年よりも昨年の方が残業時間が増えており，さらに，上半期の方が下半期よりも残業時間が多いことに注目し，これが偶然の変動といえるかどうかをデータ解析部の B さんに相談した。B さんは，この問題を以下のように，平均二乗誤差のバイアス・バリアンス分解の観点から考えた。

データ y_1, y_2, y_3, y_4 をそれぞれ確率変数 Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 の実現値とし，構造 $Y_i = \mu_i + \varepsilon_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ を仮定する。ただし，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ は，$E(\varepsilon_i) = 0$, $V(\varepsilon_i) = \sigma^2$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ である互いに無相関な確率変数とする。確率変数ベクトル $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)^T$ の期待値ベクトル $E(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)^T \in \mathbb{R}^4$ について，次の 3 通りのモデルを考える（なお，上付き添え字 ^{T} はベクトルもしくは行列の転置を表す）。

- モデル 1: $\mu_i = \theta$ $(i = 1, 2, 3, 4)$
- モデル 2: $\mu_1 = \mu_2 = \theta_A$, $\mu_3 = \mu_4 = \theta_B$
- モデル 3: $\mu_1 = \theta_A + \theta_C$, $\mu_2 = \theta_A - \theta_C$, $\mu_3 = \theta_B + \theta_C$, $\mu_4 = \theta_B - \theta_C$

それぞれのモデルのもとで，母数ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ の推定を最小二乗法により行う。このとき，推定量 $\hat{\boldsymbol{\mu}} = (\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3, \hat{\mu}_4)^T$ の平均二乗誤差の和について，以下のバイアス・バリアンス分解が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{4} E[(\hat{\mu}_i - \mu_i)^2] = \sum_{i=1}^{4} V(\hat{\mu}_i) + \sum_{i=1}^{4} (E(\hat{\mu}_i) - \mu_i)^2$$

以後，この右辺の和をそれぞれ，バリアンス項，バイアス項と呼ぶ。以下の各問に答えよ。

〔1〕　モデル 1，モデル 2，モデル 3 のそれぞれのもとでの $\boldsymbol{\mu}$ の最小二乗推定量を Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 を用いて表せ。

〔2〕　モデル 1，モデル 2，モデル 3 のそれぞれについて，バリアンス項を求めよ。また，バイアス項を，期待値ベクトルの真値 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ を用いて表せ。

〔3〕　上問〔2〕で得られた，3 つのモデルのそれぞれのもとでのバリアンス項を比較せよ。

〔4〕　上問〔2〕で得られた，3 つのモデルのそれぞれのもとでのバイアス項を比較せよ。ただし，$k = 1, 2, 3$ について，モデル k の定める $\mathbb{R}^4$ の部分ベクトル空間を M_k，$\mathbb{R}^4$ における M_k の直交補空間を $M_k^{\perp}$ とするとき，包含関係

$$M_1 \subset M_2 \subset M_3, \quad M_1^{\perp} \supset M_2^{\perp} \supset M_3^{\perp}$$

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

が成り立ち，それぞれの部分ベクトル空間の線形独立な一組の基底が以下で与えられることを利用してよい。

$$
\begin{aligned}
&M_1\text{の基底} = \{(1,1,1,1)^T\},\\
&M_1^{\perp}\text{の基底} = \{(1,1,-1,-1)^T,(1,-1,1,-1)^T,(1,-1,-1,1)^T\},\\
&M_2\text{の基底} = \{(1,1,0,0)^T,(0,0,1,1)^T\},\\
&M_2^{\perp}\text{の基底} = \{(1,-1,1,-1)^T,(1,-1,-1,1)^T\},\\
&M_3\text{の基底} = \{(1,1,0,0)^T,(0,0,1,1)^T,(1,-1,1,-1)^T\},\\
&M_3^{\perp}\text{の基底} = \{(1,-1,-1,1)^T\}
\end{aligned}
$$

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

問 5　ある母集団において，年収が 500 万円以上である人の割合 π を対面調査で推定したい。このとき，直接調査法と確率調査法が考えられる。以下の各問に答えよ。

・直接調査法：母集団からランダムに選んだ人に対し，調査者が対面で
　質問 A「あなたの年収は 500 万円以上ですか？」
と質問し，回答者の YES あるいは NO の回答を得る。しかし，年収はプライバシーにかかわることから，この調査法では正直に答えない人もいると想定される。

〔1〕　母集団には，年収を高く見せたい人と低く見せたい人の両方が一定割合で存在する。直接調査法で，年収 500 万円以上の人の中で質問 A に NO と答える人の割合を h_1 とし，年収 500 万円未満の人の中で質問 A に YES と答える人の割合を h_2 と置く。ここで，h_1 と h_2 はそれぞれの年収カテゴリーの中での条件付きの割合であることに注意する。なお，h_1 と h_2 は過去の調査から既知であると仮定する。

　具体的に $h_1 = 0.1$，$h_2 = 0.2$ のとき，母集団からランダムに選んだ n 人を調査して，その中で m 人が YES と答えたとする。この場合の π の推定量 $\tilde{\pi} = m/n$ の期待値と分散を求めよ。

〔2〕　上問〔1〕の設定 $(h_1 = 0.1,\ h_2 = 0.2)$ で，n 人中 m 人が YES と回答したときの π の最尤推定量 $\hat{\pi}$ を求めよ。

　回答者に正直に答えてもらうために次のような工夫をする。
・確率調査法：確率 p で記号 a を，確率 $1-p$ で記号 b を出力する何らかの器具（例えばサイコロや乱数表）を用意し，回答者はこの器具を調査者に見えないように適用して，a が出たら上記の質問 A に回答する。そして，b が出たら
　質問 B「あなたの年収は 500 万円未満ですか？」
に YES あるいは NO で回答する。
　確率調査法では，調査者には回答者の回答が質問 A もしくは質問 B のどちらへの回答かは分からないことから，回答者は正直に回答すると仮定する。

〔3〕　確率調査法で，回答者は，サイコロを 1 回振って 1 から 4 のいずれかの目が出たときに質問 A に答え，5，6 の目が出たときは質問 B に答える。すなわち，質問 A に答える確率は $p = 2/3$ であり，質問 B に答える確率は $1/3$ である。このとき，母集団からランダムに選んだ 1 人の回答者が YES と答える確率はいくらか。

〔4〕　上問〔3〕と同じく $p = 2/3$ として，n 人中 t 人が YES と回答したときの π の最尤推定量 $\breve{\pi}$ を求めよ。

〔5〕　上問〔3〕,〔4〕では $p = 2/3$ とした。p の値はどのような観点で選択したらよいかを述べよ。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

医薬生物学

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

問 1　新規治療群（X 群）と対照治療群（Y 群）の有効性を評価する臨床試験を考える。各群の人数はともに n 人とする。X 群の観測値 X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は互いに独立に一様分布 $U(\delta, 1+\delta)$ $(0 \leq \delta < 1)$ に従うとする。Y 群の観測値 Y_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ は互いに独立に一様分布 $U(0, 1)$ に従うとする。X 群と Y 群の観測値をまとめて小さい順に並べて，1 から $2n$ までの順位を与える。ただし，同順位はないものとする。X 群の観測値の順位を R_i とし，$R_X = \sum_{i=1}^{n} R_i$ とする。X_i が Y_j よりも確率的に大きいか否かを調べるために，R_X に基づく片側の Wilcoxon 順位和検定（以下，片側 Wilcoxon 検定と呼ぶ）を考える。有意水準は α とする。以下の各問に答えよ。

〔1〕　X_i と Y_j の累積分布関数（それぞれ F_X と F_Y とする）について，$F_X(x) = F_Y(x-\delta)$ が成立する。片側 Wilcoxon 検定の帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を δ を用いて表せ。

〔2〕　上問〔1〕の帰無仮説のもとで，R_X の期待値 $E[R_X \mid H_0]$ を求めよ。

〔3〕　上問〔1〕の対立仮説を前提にする。

〔3-1〕　Y_j の実現値を y_j（定数）とする。$P(X_i > y_j)$ を求めよ。

〔3-2〕　$P(X_i > Y_j)$ を求めよ。

〔3-3〕　R_X の期待値 $E[R_X \mid H_1]$ を求めよ。ただし，次式が成り立つことを使用してよい。

$$R_X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} I(X_i > Y_j) + \frac{n(n+1)}{2}$$

ここで，$I(X_i > Y_j)$ は，$X_i > Y_j$ のときに 1，それ以外のときに 0 をとる指示関数である。

〔4〕　上問〔1〕の帰無仮説のもとで，次式の検定統計量 Z が標準正規分布に従うとする。

$$Z = \frac{R_X - E[R_X \mid H_0]}{\sqrt{V(R_X)}}, \quad V(R_X) = \frac{n^3}{6}$$

標準正規分布の上側 $100\alpha\%$ 点を z_α，標準正規分布の累積分布関数を Φ とする。上問〔1〕の対立仮説のもとで，この検定統計量に基づく片側 Wilcoxon 検定の検出力を n，δ，z_α，Φ を用いて表せ。ただし，対立仮説のもとでも R_X の分散は $V(R_X) = n^3/6$ であるとしてよい。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

問 2　ある都市の「疾患 D の年間死亡数」（以下，死亡数とする）について考える。A 市と B 市の 1 万人あたりの死亡数 X_i $(i = A, B)$ がそれぞれ互いに独立に次式の確率関数をもつポアソン分布に従うとする。ただし，$\theta_i > 0$（死亡率）とする。

$$f(x_i) = P(X_i = x_i) = \frac{\exp(-\theta_i)\theta_i^{x_i}}{x_i!} \quad (x_i = 0, 1, 2, \dots)$$

人口が 2 万人である A 市の死亡数 Y_A と，人口が 8 万人である B 市の死亡数 Y_B について，$Y_A = 4$（人），$Y_B = 14$（人）というデータが得られた。以下の各問に答えよ。

〔1〕　$\theta_A = \theta_B = \theta$ のもとで，θ の最尤推定量とその実現値を求めよ。

〔2〕　次の帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を考える。

$$H_0 : \theta_A = \theta_B, \quad H_1 : \theta_A \neq \theta_B$$

正規近似を用いた死亡率の差の検定（有意水準 5%）によって，帰無仮説を検定した結果を述べよ。ただし，人口が T（万人）である市の死亡数を Y（人）とするとき，死亡率 Y/T の分散の推定量が Y/T^2 で与えられることを用いてよい。

A 市と B 市の死亡数を踏まえて，人口が 5 万人である C 市の死亡数 Y_C を予測したい。

〔3〕　$\theta_A = \theta_B = \theta$ のもとで，θ の事前分布として，次式の確率密度関数をもつガンマ分布を仮定する。ただし，$\alpha > 0$，$\beta > 0$ とする。$\alpha = \beta = 1$ のもとで，θ の事後分布を求めよ。

$$g(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}\exp(-\beta\theta), \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}\exp(-t)dt$$

〔4〕　上問〔3〕で得られた事後分布を用いて，Y_C の事後予測分布を求めよ。ただし，C 市の 1 万人あたりの死亡数 X_C は，X_A と X_B と互いに独立にパラメータ θ_C $(= \theta_A = \theta_B = \theta)$ のポアソン分布に従うとする。

〔5〕　上問〔4〕で求めた事後予測分布の期待値を求めて，上問〔1〕で求めた最尤推定値に基づく予測値との大小関係について考察せよ。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

問 3　がん，その他の疾患，事故などをそれぞれ原因とする $m\ (\geq 2)$ 種類の死亡イベントを考える。これらの互いに競合するイベントのうち，観測の起点から，いずれかのイベントが最初に起きるまでの時間を表す確率変数を $T\ (0 \leq T < \infty)$ とする。ただし，どの対象者についても，競合するイベントが同時に発生することはないとする。$J \in \{1, 2, \ldots, m\}$ をイベントの種類を表す確率変数として，$P(J = j) > 0\ (j = 1, 2, \ldots, m)$ とする。生存関数を $S(t) = P(T > t)$，分布関数を $F(t) = 1 - S(t)$，ハザード関数を $\lambda(t)$ とする。イベント j の部分密度関数 $f_j(t)$，累積発生関数 $F_j(t)$，原因別ハザード関数 $\lambda_j(t)$ はそれぞれ次式で定義される。このとき，以下の各問に答えよ。

$$f_j(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t, J = j)}{\Delta t},$$

$$F_j(t) = P(0 \leq T \leq t, J = j) = \int_0^t f_j(u)du,$$

$$\lambda_j(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t, J = j \mid T \geq t)}{\Delta t}$$

〔1〕　原因別ハザード関数 $\lambda_j(t)$ を $f_j(t)$ と $S(t)$ を用いて表せ。

〔2〕　$S_j(t) = P(T > t, J = j)$ とするとき，$1 - F_j(t) > S_j(t)$ であることを示せ。

〔3〕　次式が成り立つことを示せ。

$$\lambda(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \cdots + \lambda_m(t)$$

〔4〕　$m = 2$ の状況を考える。イベント 1 と 2 の原因別ハザード関数が次式で与えられるとする。ただし，$\alpha_1 > 0$，$\alpha_2 > 0$，$\gamma_1 > 0$，$\gamma_2 > 0$ とする。

$$\lambda_1(t) = \alpha_1\gamma_1(\gamma_1 t)^{\alpha_1 - 1}, \quad \lambda_2(t) = \alpha_2\gamma_2(\gamma_2 t)^{\alpha_2 - 1} \quad (t > 0)$$

このとき，生存関数 $S(t)$ を α_1，α_2，γ_1，γ_2 を用いて表せ。

〔5〕　原因別ハザード関数 $\lambda_1(t)$ に対して，次の比例ハザードモデルを仮定する。

$$\lambda_1(t) = \lambda_1^*(t)\exp(\beta x)$$

ただし，$\lambda_1^*(t)$ は，原因別ハザード関数 $\lambda_1(t)$ の基準ハザード関数とする。共変量 x の $F_1(t)$ への効果をこのモデルのパラメータ β から評価することは適切かどうか，理由を含めて述べよ。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

問 4　ある臨床試験のもとで，2 つの主要評価変数（以下，主要変数）それぞれに片側検定を適用する状況を考える。2 つの検定について，帰無仮説を H_1 と H_2，有意水準を α_1 と α_2，p 値を p_1 と p_2 とする。また，H_1 と H_2 がともに真である帰無仮説を $H_1 \cap H_2$ とする。$H_1 \cap H_2$ が真であるときについて，以下の各問に答えよ。

〔1〕　p_1 と p_2 は互いに独立に一様分布 $U(0,1)$ に従うとする。

〔1-1〕　$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.05$ のもとで，少なくとも 1 つの真の帰無仮説が棄却される確率（FWER: familywise error rate）を求めよ。

〔1-2〕　Bonferroni 法によって，FWER を 0.05 以下に制御することを考える。Bonferroni 法のもとでの FWER を求めよ。

〔1-3〕　FWER を 0.05 に一致させるための α_1 と α_2 に対する制約式を求めよ。

〔1-4〕　2 つの p 値を昇順に並べたものを $p_{(1)} \leq p_{(2)}$ とする。Simes 法では，$p_{(1)} \leq \alpha/2$，または $p_{(2)} \leq \alpha$ のときに，$H_1 \cap H_2$ を棄却する。FWER を α 以下に制御する Bonferroni 法では，H_1 または H_2 を棄却するときも $H_1 \cap H_2$ を棄却できる。p 値に関する p_1 と p_2 の 2 次元平面上で $H_1 \cap H_2$ に対する棄却域を考えるとき，Bonferroni 法と Simes 法で異なる領域（棄却域）を答えよ。

〔2〕　2 つの主要変数に対する検定の検定統計量を $\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$ とする。$H_1 \cap H_2$ のもとで，$\boldsymbol{Z}$ は平均ベクトル $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，分散共分散行列 $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ の 2 変量正規分布に従うとする。ただし，$\rho \geq 0$ とする。2 つの検定の有意水準は $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ とし，標準正規分布の上側 $100\alpha\%$ 点を z_α とする。これ以降，FWER は，ρ の関数として，FWER(ρ) と表記する。

〔2-1〕　FWER(ρ) を α と $\phi(\rho) = P[(Z_1 > z_\alpha) \cap (Z_2 > z_\alpha)]$ を用いて表せ。

〔2-2〕　$\rho \geq 0$ のもとで，FWER$(\rho) \leq$ FWER(0) であることを示せ。ただし，$P[(Z_1 > z_\alpha) \cap (Z_2 > z_\alpha)] \geq P[Z_1 > z_\alpha]P[Z_2 > z_\alpha]$ であることを証明なしに用いてよい。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

問 5　ある母集団において，年収が 500 万円以上である人の割合 π を対面調査で推定したい。このとき，直接調査法と確率調査法が考えられる。以下の各問に答えよ。

・直接調査法：母集団からランダムに選んだ人に対し，調査者が対面で
　質問 A「あなたの年収は 500 万円以上ですか？」
と質問し，回答者の YES あるいは NO の回答を得る。しかし，年収はプライバシーにかかわることから，この調査法では正直に答えない人もいると想定される。

〔1〕　母集団には，年収を高く見せたい人と低く見せたい人の両方が一定割合で存在する。直接調査法で，年収 500 万円以上の人の中で質問 A に NO と答える人の割合を h_1 とし，年収 500 万円未満の人の中で質問 A に YES と答える人の割合を h_2 と置く。ここで，h_1 と h_2 はそれぞれの年収カテゴリーの中での条件付きの割合であることに注意する。なお，h_1 と h_2 は過去の調査から既知であると仮定する。

　具体的に $h_1 = 0.1$，$h_2 = 0.2$ のとき，母集団からランダムに選んだ n 人を調査して，その中で m 人が YES と答えたとする。この場合の π の推定量 $\tilde{\pi} = m/n$ の期待値と分散を求めよ。

〔2〕　上問〔1〕の設定 $(h_1 = 0.1,\ h_2 = 0.2)$ で，n 人中 m 人が YES と回答したときの π の最尤推定量 $\hat{\pi}$ を求めよ。

　回答者に正直に答えてもらうために次のような工夫をする。
・確率調査法：確率 p で記号 a を，確率 $1-p$ で記号 b を出力する何らかの器具（例えばサイコロや乱数表）を用意し，回答者はこの器具を調査者に見えないように適用して，a が出たら上記の質問 A に回答する。そして，b が出たら
　質問 B「あなたの年収は 500 万円未満ですか？」
に YES あるいは NO で回答する。
　確率調査法では，調査者には回答者の回答が質問 A もしくは質問 B のどちらへの回答かは分からないことから，回答者は正直に回答すると仮定する。

〔3〕　確率調査法で，回答者は，サイコロを 1 回振って 1 から 4 のいずれかの目が出たときに質問 A に答え，5，6 の目が出たときは質問 B に答える。すなわち，質問 A に答える確率は $p = 2/3$ であり，質問 B に答える確率は $1/3$ である。このとき，母集団からランダムに選んだ 1 人の回答者が YES と答える確率はいくらか。

〔4〕　上問〔3〕と同じく $p = 2/3$ として，n 人中 t 人が YES と回答したときの π の最尤推定量 $\check{\pi}$ を求めよ。

〔5〕　上問〔3〕,〔4〕では $p = 2/3$ とした。p の値はどのような観点で選択したらよいかを述べよ。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

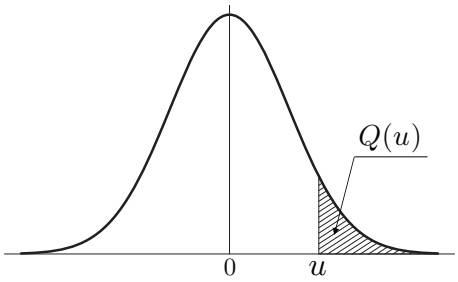
© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

付　表

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

付表 1. 標準正規分布の上側確率

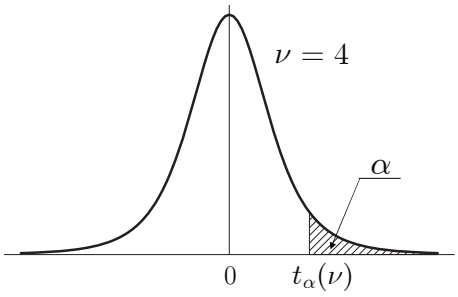


u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

$u = 0.00 \sim 3.99$ に対する，正規分布の上側確率 $Q(u)$ を与える。
例：$u = 1.96$ に対しては，左の見出し 1.9 と上の見出し .06 との交差点で，$Q(u) = .0250$ と読む。表にない u に対しては適宜補間すること。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

付表 2. t 分布のパーセント点

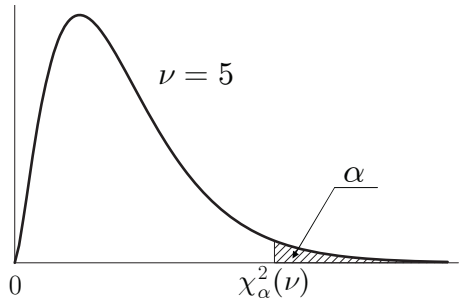


	α				
ν	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
240	1.285	1.651	1.970	2.342	2.596
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

自由度 ν の t 分布の上側確率 α に対する t の値を $t_\alpha(\nu)$ で表す。
例：自由度 $\nu = 20$ の上側 5%点 ($\alpha = 0.05$) は，$t_{0.05}(20) = 1.725$ である。
表にない自由度に対しては適宜補間すること。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

付表 3. カイ二乗分布のパーセント点

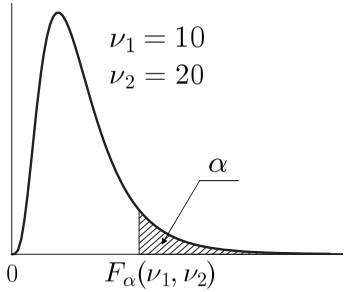


	α							
ν	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01
1	0.00	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.63
2	0.02	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21
3	0.11	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.34
4	0.30	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28
5	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09
6	0.87	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81
7	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48
8	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09
9	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67
10	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21
11	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72
12	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22
13	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69
14	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14
15	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58
16	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00
17	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41
18	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81
19	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19
20	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57
25	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31
30	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89
35	18.51	20.57	22.47	24.80	46.06	49.80	53.20	57.34
40	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69
50	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15
60	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38
70	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.43
80	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.88	106.63	112.33
90	61.75	65.65	69.13	73.29	107.57	113.15	118.14	124.12
100	70.06	74.22	77.93	82.36	118.50	124.34	129.56	135.81
120	86.92	91.57	95.70	100.62	140.23	146.57	152.21	158.95
140	104.03	109.14	113.66	119.03	161.83	168.61	174.65	181.84
160	121.35	126.87	131.76	137.55	183.31	190.52	196.92	204.53
180	138.82	144.74	149.97	156.15	204.70	212.30	219.04	227.06
200	156.43	162.73	168.28	174.84	226.02	233.99	241.06	249.45
240	191.99	198.98	205.14	212.39	268.47	277.14	284.80	293.89

自由度 ν のカイ二乗分布の上側確率 α に対する χ^2 の値を $\chi^2_\alpha(\nu)$ で表す。
例：自由度 $\nu = 20$ の上側 5%点 ($\alpha = 0.05$) は，$\chi^2_{0.05}(20) = 31.41$ である。
表にない自由度に対しては適宜補間すること。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

付表 4. F 分布のパーセント点



$\alpha = 0.05$

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	40	60	120	∞
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735	4.619	4.558	4.464	4.431	4.398	4.365
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978	2.845	2.774	2.661	2.621	2.580	2.538
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544	2.403	2.328	2.204	2.160	2.114	2.066
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348	2.203	2.124	1.994	1.946	1.896	1.843
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282	2.236	2.089	2.007	1.872	1.822	1.768	1.711
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165	2.015	1.932	1.792	1.740	1.683	1.622
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077	1.924	1.839	1.693	1.637	1.577	1.509
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993	1.836	1.748	1.594	1.534	1.467	1.389
120	3.920	3.072	2.680	2.447	2.290	2.175	2.087	2.016	1.959	1.910	1.750	1.659	1.495	1.429	1.352	1.254

$\alpha = 0.025$

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	40	60	120	∞
5	10.007	8.434	7.764	7.388	7.146	6.978	6.853	6.757	6.681	6.619	6.428	6.329	6.175	6.123	6.069	6.015
10	6.937	5.456	4.826	4.468	4.236	4.072	3.950	3.855	3.779	3.717	3.522	3.419	3.255	3.198	3.140	3.080
15	6.200	4.765	4.153	3.804	3.576	3.415	3.293	3.199	3.123	3.060	2.862	2.756	2.585	2.524	2.461	2.395
20	5.871	4.461	3.859	3.515	3.289	3.128	3.007	2.913	2.837	2.774	2.573	2.464	2.287	2.223	2.156	2.085
25	5.686	4.291	3.694	3.353	3.129	2.969	2.848	2.753	2.677	2.613	2.411	2.300	2.118	2.052	1.981	1.906
30	5.568	4.182	3.589	3.250	3.026	2.867	2.746	2.651	2.575	2.511	2.307	2.195	2.009	1.940	1.866	1.787
40	5.424	4.051	3.463	3.126	2.904	2.744	2.624	2.529	2.452	2.388	2.182	2.068	1.875	1.803	1.724	1.637
60	5.286	3.925	3.343	3.008	2.786	2.627	2.507	2.412	2.334	2.270	2.061	1.944	1.744	1.667	1.581	1.482
120	5.152	3.805	3.227	2.894	2.674	2.515	2.395	2.299	2.222	2.157	1.945	1.825	1.614	1.530	1.433	1.310

自由度 (ν_1, ν_2) の F 分布の上側確率 α に対する F の値を $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ で表す。
例：自由度 $\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 20$ の上側 5% 点 $(\alpha = 0.05)$ は，$F_{0.05}(5, 20) = 2.711$ である。
表にない自由度に対しては適宜補間すること。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

付表 5. 指数関数と常用対数

指数関数			
x	e^x	x	e^x
0.01	1.0101	0.51	1.6653
0.02	1.0202	0.52	1.6820
0.03	1.0305	0.53	1.6989
0.04	1.0408	0.54	1.7160
0.05	1.0513	0.55	1.7333
0.06	1.0618	0.56	1.7507
0.07	1.0725	0.57	1.7683
0.08	1.0833	0.58	1.7860
0.09	1.0942	0.59	1.8040
0.10	1.1052	0.60	1.8221
0.11	1.1163	0.61	1.8404
0.12	1.1275	0.62	1.8589
0.13	1.1388	0.63	1.8776
0.14	1.1503	0.64	1.8965
0.15	1.1618	0.65	1.9155
0.16	1.1735	0.66	1.9348
0.17	1.1853	0.67	1.9542
0.18	1.1972	0.68	1.9739
0.19	1.2092	0.69	1.9937
0.20	1.2214	0.70	2.0138
0.21	1.2337	0.71	2.0340
0.22	1.2461	0.72	2.0544
0.23	1.2586	0.73	2.0751
0.24	1.2712	0.74	2.0959
0.25	1.2840	0.75	2.1170
0.26	1.2969	0.76	2.1383
0.27	1.3100	0.77	2.1598
0.28	1.3231	0.78	2.1815
0.29	1.3364	0.79	2.2034
0.30	1.3499	0.80	2.2255
0.31	1.3634	0.81	2.2479
0.32	1.3771	0.82	2.2705
0.33	1.3910	0.83	2.2933
0.34	1.4049	0.84	2.3164
0.35	1.4191	0.85	2.3396
0.36	1.4333	0.86	2.3632
0.37	1.4477	0.87	2.3869
0.38	1.4623	0.88	2.4109
0.39	1.4770	0.89	2.4351
0.40	1.4918	0.90	2.4596
0.41	1.5068	0.91	2.4843
0.42	1.5220	0.92	2.5093
0.43	1.5373	0.93	2.5345
0.44	1.5527	0.94	2.5600
0.45	1.5683	0.95	2.5857
0.46	1.5841	0.96	2.6117
0.47	1.6000	0.97	2.6379
0.48	1.6161	0.98	2.6645
0.49	1.6323	0.99	2.6912
0.50	1.6487	1.00	2.7183

常用対数			
x	$\log_{10} x$	x	$\log_{10} x$
0.1	-1.0000	5.1	0.7076
0.2	-0.6990	5.2	0.7160
0.3	-0.5229	5.3	0.7243
0.4	-0.3979	5.4	0.7324
0.5	-0.3010	5.5	0.7404
0.6	-0.2218	5.6	0.7482
0.7	-0.1549	5.7	0.7559
0.8	-0.0969	5.8	0.7634
0.9	-0.0458	5.9	0.7709
1.0	0.0000	6.0	0.7782
1.1	0.0414	6.1	0.7853
1.2	0.0792	6.2	0.7924
1.3	0.1139	6.3	0.7993
1.4	0.1461	6.4	0.8062
1.5	0.1761	6.5	0.8129
1.6	0.2041	6.6	0.8195
1.7	0.2304	6.7	0.8261
1.8	0.2553	6.8	0.8325
1.9	0.2788	6.9	0.8388
2.0	0.3010	7.0	0.8451
2.1	0.3222	7.1	0.8513
2.2	0.3424	7.2	0.8573
2.3	0.3617	7.3	0.8633
2.4	0.3802	7.4	0.8692
2.5	0.3979	7.5	0.8751
2.6	0.4150	7.6	0.8808
2.7	0.4314	7.7	0.8865
2.8	0.4472	7.8	0.8921
2.9	0.4624	7.9	0.8976
3.0	0.4771	8.0	0.9031
3.1	0.4914	8.1	0.9085
3.2	0.5051	8.2	0.9138
3.3	0.5185	8.3	0.9191
3.4	0.5315	8.4	0.9243
3.5	0.5441	8.5	0.9294
3.6	0.5563	8.6	0.9345
3.7	0.5682	8.7	0.9395
3.8	0.5798	8.8	0.9445
3.9	0.5911	8.9	0.9494
4.0	0.6021	9.0	0.9542
4.1	0.6128	9.1	0.9590
4.2	0.6232	9.2	0.9638
4.3	0.6335	9.3	0.9685
4.4	0.6435	9.4	0.9731
4.5	0.6532	9.5	0.9777
4.6	0.6628	9.6	0.9823
4.7	0.6721	9.7	0.9868
4.8	0.6812	9.8	0.9912
4.9	0.6902	9.9	0.9956
5.0	0.6990	10.0	1.0000

注: 常用対数を自然対数に直すには 2.3026 をかければよい。

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.

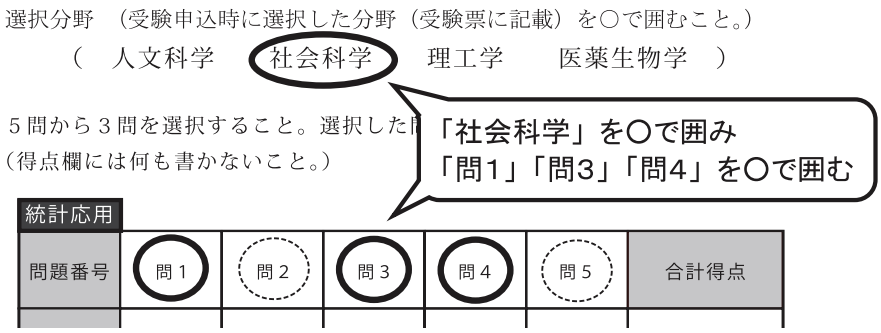
【解答冊子記入例】

- 注意事項 6 ⑥：〔解答冊子各ページ先頭の記入例〕

（例）問 1 を解答する場合

- 注意事項 6 ⑦：〔解答冊子表紙選択分野・選択問題の記入例〕

（例）**社会科学** 分野の**問 1**，**問 3**，**問 4** を選択し，解答する場合



著作権法により、本冊子の無断での複製・転載等は禁止されています。

一般財団法人　統計質保証推進協会
統計検定センター

〒101-0051 東京都千代田区神田神保町３丁目６番
URL **http://www.toukei-kentei.jp**

2025.11

© 一般財団法人統計質保証推進協会 All Rights Reserved.