2019.11.24

数理略解

数理１

[1]　期待値は $E[X]=\frac{d}{dt}G_X(t)|_{t=1}$ と計算され，$E[X(X-1)]=\frac{d^2}{dt^2}G_X(t)|_{t=1}$ より分散は

$V[X]=E[X(X-1)]+E[X]-(E[X])^2$ となる。

[2]　$G_X(t)=(pt+1-p)^n$。上問 [1] の計算により $E[X]=np$，$V[X]=np(1-p)$ を得る。

[3]　$G_X(t)=\sum_{k\le r}t^kP(X=k)+\sum_{k>r}t^kP(X=k)\ge\sum_{k\le r}t^kP(X=k)$ であり，$G_X(t)\ge t^rP(X\le r)$ より与式が導かれる。

[4]　$P(X\le an)\le(pt+1-p)^nt^{-an}$ の右辺の最小値を求める。$f(t)=n\{\log(pt+1-p)-a\log t\}$ は

$t_0=\frac{(1-p)a}{p(1-a)}=\left(\frac{a}{1-a}\right)\Big/\left(\frac{p}{1-p}\right)$ にて最小値を取り，これを不等式の右辺に代入して

$\left(\frac{p}{a}\right)^{an}\left(\frac{1-p}{1-a}\right)^{(1-a)n}$ を得る。

数理２

[1]　$E[U]=\frac{2}{\lambda}$

[2]　$g(u)=\begin{cases}\lambda^2ue^{-\lambda u} & (u>0)\\ 0 & (u\le 0)\end{cases}$

[3]　$E\left[\frac{1}{U}\right]=\lambda$

[4]　$R(\alpha,\theta)=\alpha+\dfrac{2}{\alpha}-2$ であり，これを最小にするのは $\alpha=\sqrt{2}$ である。

数理３

[1] $X_1, ... , X_n$ の同時確率密度関数

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n} & (x_1,\ldots,x_n\le\theta)\\ 0 & （その他）\end{cases}$$

の条件 $(x_1, . . . , x_n \le \theta)$ は $(y \le \theta)$ と同値であるので，Fisher-Neyman の分解定理により，Y は θ に関する十分統計量である。

[2] Y の累積分布関数 $G(y)=\left(\dfrac{y}{\theta}\right)^n$ を y で微分して $g(y)=G'(y)=\dfrac{n}{\theta^n}y^{n-1}$ と求められる。

[3] 便宜上 $y=x_n$ とすると，$f(x_1,\ldots,x_{n-1},y\mid y)=\dfrac{1}{y^{n-1}}$ となる。$y=x_n$ となる確率が $1/n$ であるとして $f(x_1,\ldots,x_{n-1},y\mid y)=\dfrac{1}{n\,y^{n-1}}$ でもよい。

[4] $E[Y]=\dfrac{n}{n+1}\theta$ であるので，$\tilde{\theta}=\dfrac{n+1}{n}Y$ とすれば不偏性を持つ。

[5] 関数 $u(Y)$ の期待値が 0 であることより

$$E[u(Y)]=\int_0^\theta u(y)\frac{n}{\theta^n}y^{n-1}dy=0 \quad\Rightarrow\quad \int_0^\theta u(y)y^{n-1}dy=0$$

となる。これがすべての θ で成り立つためには $u(y)\equiv 0$ でなければならない。

[6] $E[s(Y)]=\theta$ であるとすると，

$$E[s(Y)-\tilde{\theta}]=E\left[s(Y)-\frac{n+1}{n}Y\right]=E[u(Y)]=0$$

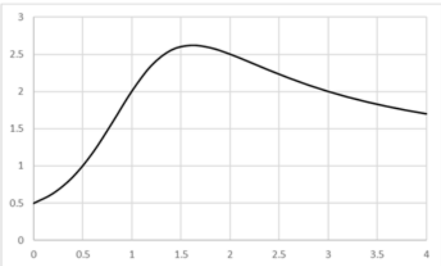
となるので，上問 [5] より $s(Y)\equiv\tilde{\theta}$ が示される。

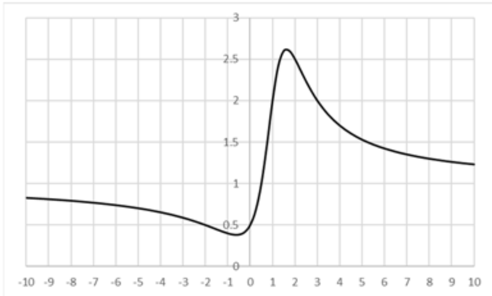
数理４

[1]　$\alpha = \frac{1}{\pi}\left(\tan^{-1} 3 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1.249}{3.1416} - \frac{1}{4} \approx 0.148$

[2]　$1-\beta = P(1 < X < 3 \mid \theta = 1) = \frac{1}{\pi}\left(\tan^{-1} 2 - 0\right) = \frac{1.107}{3.1416} \approx 0.352$

[3]　尤度比は $\lambda(x) = \frac{1+x^2}{1+(x-1)^2}$ で，$\lambda(1) = \lambda(3) = 2$ となる。$\lambda(x)$ のグラフは次のようである





※左図で正解である。参考のために範囲を広げた右図を示す。

[4]　ネイマン・ピアソンの基本定理により，$R = \{x : 1 < x < 3\}$ を棄却域にする検定が最強力検定となる。

数理５

[1]　分布は ξ を中心に左右対称であり，不定積分は収束するので $E[\mu] = \xi$ となる。分散は積分計算により $V[\mu] = \frac{2}{\lambda^2}$ と求められる。

[2]　$g(\mu \mid \boldsymbol{y}) \propto \frac{\lambda}{2(2\pi)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 + n(\mu - \overline{y})^2\right\} - \lambda \mid \mu - \xi \mid\right]$

[3] $$\hat{\mu} = \begin{cases} \max\left(\overline{y} - \dfrac{\lambda}{n}, \xi\right) & (\overline{y} > \xi) \\ \xi & (\overline{y} = \xi) \\ \min\left(\overline{y} + \dfrac{\lambda}{n}, \xi\right) & (\overline{y} < \xi) \end{cases}$$

[4] 事後分布に基づく推定値は, 最尤推定値 $\bar{y}$ に比べ事前分布の平均値 ξ に近づく。$\bar{y}$ がかなり ξ に近い場合には, $\bar{y}$ の値によらず推定値が事前分布の平均値 ξ となる。