2016.11.27

統計検定１級（統計数理）

解答と解説（数理）略解

数理１

[1]　尤度は

$$L(\theta)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\log\theta)^2\right]$$

であり，最尤推定量は $\hat{\theta}=e^{\bar{X}}$ となる。

[2]　不偏性は

$$E[\tilde{\theta}]=E[e^{\bar{X}}]\cdot\exp\left[-\frac{1}{2n}\right]=\exp\left[\mu+\frac{1}{2n}\right]\cdot\exp\left[-\frac{1}{2n}\right]=e^{\mu}$$

と示される。

[3]　モーメント母関数を用いて

$$MSE[\hat{\theta}=e^{2\mu}\{e^{2/n}-2e^{1/(2n)}+1\}$$

より示される。

[4]　フィッシャー情報量は $I(\theta)=\dfrac{n}{\theta^2}$ となる。また，$V[\tilde{\theta}]$ は $1/I(\theta)$ よりも大きくなる。

数理２

[1]　部分積分により容易に示される。

[2]　上側確率は $Q(c)=e^{-\lambda c}$ であり，上側 100α%点は $u(\alpha)=-\dfrac{1}{\lambda}\log\alpha$ を得る。

[3]　λ の最尤推定量は $\hat{\lambda}=1/\overline{X}$ となる。これより，$Q(c)$ および $u(\alpha)$ の最尤推定量は，それぞれ $\hat{Q}(c)=e^{-c/\overline{X}}$ および $\hat{u}(\alpha)=-\overline{X}\log\alpha$ となる。$\hat{u}(\alpha)$ は不偏である。

[4]　数学的帰納法で証明できる。また，

$$E[\widetilde{Q}(c)]=e^{-\lambda c}\int_0^\infty z^{n-1}\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}e^{-\lambda z}dz=e^{-\lambda c}$$

より $\widetilde{Q}(c)$ の不偏性が示される。

数理３

[1]　それぞれの推定量の期待値を取ることにより，不偏性は容易に示される。

[2]　β の最小二乗推定量は $b_2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$ となる。期待値は $E[b_2] = \beta$ となる。

[3]　それぞれの推定量の分散は，簡単な計算により

$$V[b_0] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{{x_i}^2}\sigma^2,\quad V[b_1] = \frac{n}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\sigma^2,\quad V[b_2] = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\sigma^2$$

と求められ，$V[b_2] \le V[b_1] \le V[b_0]$ となる。

数理４

[1]　X は二項分布 $B(n,\theta)$ に従い，$V[\hat{\theta}_1]=\dfrac{\theta(1-\theta)}{n}\approx\dfrac{0.2248}{n}$ となる。

[2]　Y は二項分布 $B(n,2\theta)$ に従い，$V[\hat{\theta}_2]=\dfrac{2\theta(1-2\theta)}{4n}\approx\dfrac{0.0542}{n}$ となる。

[3]　$V[\hat{\theta}_3]=\dfrac{1}{n}\left\{\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}P(0\le Z\le\sqrt{2})-\theta^2\right\}\approx\dfrac{0.0024}{n}$ を得る。

[4]　必要となる乱数の個数は，$\hat{\theta}_1$ のときに $n=10000$ とすると，$\hat{\theta}_2$ では約 2411.0 個，$\hat{\theta}_3$ では 102.3 個の乱数で済む。

数理５

[1] 計算により容易に示される。

[2] $$d^2=\frac{SS_B}{(SS_B+SS_W)/(n-1)}=\frac{(n-1)SS_B/\{SS_W/(n-2)\}}{SS_B/\{SS_W/(n-2)\}+n-2}=\frac{(n-1)F}{n-2+F}$$

と表される.

[3] 自由度 $n-2$ の t 分布に従う確率変数を T とすると，$F=T^2$ は自由度 $(1, n-2)$ の F 分布に従う。

[4] 帰無仮説 (1) が棄却された場合，欠測のメカニズムは MCAR であるとはいえない。検定が有意でない場合は，両分布の分散や分布形までが同じであるとの保証はないことから，欠測のメカニズムが MCAR であるとまではいい切れない。

[5] 分散の違いには F 検定が適用できる。両群の分布形の違いの検定では，たとえばコルモゴロフ・スミルノフ検定がある。