RSS Higher Certificate in Statistics, Specimen B

Module 5 : Further Probability and Inference

1. ある大工の仕事場での材木の切りくずの長さ X は確率密度関数

$$f(x)=\frac{1}{\theta} \quad (0 \le x \le \theta)$$

を持つ連続型一様分布に従っているという．ここで θ は未知のパラメータである．

(i) 確率変数 X の期待値と分散を求めよ．

(ii) 切りくずの無作為標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が得られたとき，

$$P\,(\text{切りくずの標本中の最大の長さ} \le x) = (x/\theta)^n \quad (0 \le x \le \theta)$$

となること示し，標本での最大値 $X_{(n)}$ の確率密度関数を導け．さらに

$$E(X_{(n)})=\frac{n\theta}{n+1}$$

および

$$\mathrm{Var}(X_{(n)})=\frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

を示せ．また θ の不偏推定量を得るためには $X_{(n)}$ を何倍すればよいかを示し，その不偏推定量の分散を求めよ．

(iii) パラメータ θ のモーメント法による推定量は $\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ であることを示し，その分散を求めよ．

2. 以下の各問に答えよ．

(i) 連続型確率変数 T は確率密度関数

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}, \quad t>0, \quad \lambda>0 \qquad (*)$$

を持つとする．

(a) $f(t)$ の概形を描け．

(b) X の累積分布関数は

$$F(t)=1-e^{-\lambda t}, \quad t>0, \quad \lambda>0$$

となることを示せ．

(c) $$P(a<T\le b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}, \quad 0<a<b$$

を示せ．

(ii) ある建設会社の経理部の主任は，会社の発行する請求書への支払い期間を表す確率変数 T の確率密度関数が，λ を未知パラメータとして上記の (*) で与えられるとしている．無作為に選んだ 100 枚の請求書への支払いのうち，50 枚は第 1 週目に支払われ，35 枚は第 2 週目，15 枚は 2 週目以降に支払われた．このときの尤度関数は，k を定数として

$$L(\lambda)=k(1-e^{-\lambda})^{50}(e^{-\lambda}-e^{-2\lambda})^{35}(e^{-2\lambda})^{15}$$

となることを説明せよ．これより，

$$\log L(\lambda)=\log(k)+85\log(1-e^{-\lambda})-65\lambda$$

となることを導き，λ の最尤推定値は約 0.836 となることを示せ.

(iii) パラメータの値が $\lambda=0.836$ であると仮定し, 請求書への支払いが第 1 週目, 第 2 週目, 第 2 週目以降となる期待値をそれぞれ求めよ．これにより，上記の $f(t)$ で与えられるモデルがどの程度データに当てはまっているのかについてコメントせよ.

3. 以下の各問に答えよ（この問題では，任意の非負の整数 m に対し $\int_0^\infty u^m e^{-u}du=m!$ が成り立つことを用いてよい）.

確率変数 X は確率密度関数

$$f(x)=\begin{cases}\lambda^{k+1}x^k e^{-\lambda x}/k! & (x>0)\\ 0 & (x\le 0)\end{cases}$$

を持つとする．ここで $\lambda>0$ で k は非負の整数である.

(i) X のモーメント母関数は $M(\theta)=\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-\theta}\right)^{k+1}$ $(\theta<\lambda)$，で与えられることを示せ.

(ii) 確率変数 Y を，それぞれが X と同じ分布に従う独立な n 個の確率変数の和であるとする．Y のモーメント母関数を求め，Y の期待値と分散を計算せよ.

(iii) Y の確率密度関数を求めよ.

4.

(a) 以下の各問に答えよ.

(i) 点推定量の不偏性と一致性について説明せよ．これらの性質が平均と分散が未知の正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ における μ の最尤推定量および σ^2 の最尤推定量に対しどのように適用されるのかについて論ぜよ．なお，各最尤推定量はそれぞれ

$$\hat{\mu}=\overline{X} \quad \text{および} \quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum(X_i-\overline{X})^2$$

で与えられることを証明なしに用いてよい．また同じく証明なしに $V[\hat{\sigma}^2]=O(1/n)$ であることも用いてよい.

(ii) X および Y を共に分散が有限である確率変数としたとき，$\mathrm{Var}[X+Y]=\mathrm{Var}[X]+\mathrm{Var}[Y]+2\mathrm{Cov}[X,Y]$ であることを示せ.

(iii) 観測値 X_1 および X_2 は共に同じ平均 μ と同じ分散 σ^2 を持ち，X_1 と X_2 の間の相関係数は ρ であるとする．このとき，$\overline{X}=(X_1+X_2)/2$ は μ の不偏推定量であることを示し，その分散を求めよ．また，以下のどの条件の下で $\overline{X}$ は最も精度よく μ を推定するであろうか.

(A)　X_1 と X_2 が独立

(B)　X_1 と X_2 の間の相関が正

(C)　X_1 と X_2 の間の相関が負

(b) 連続型確率変数 X および Y の同時確率密度関数が $f(x, y) = e^{-x-y}$ $(x > 0, y > 0)$ で与えられるとする．X および Y の周辺分布は何か．またそれらの期待値と分散を求めよ．さらに X と Y とは互いに独立であるか，その理由と共に述べよ．