RSS Higher Certificate in Statistics, Specimen B

Module 5 : Further Probability and Inference

Solutions

Question 1

(i) $E(X)=\int_0^\theta \frac{x}{\theta}dx=\frac{1}{\theta}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^\theta=\frac{1}{2}\theta$．また $E(X^2)=\int_0^\theta \frac{x^2}{\theta}dx=\frac{1}{\theta}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^\theta=\frac{1}{3}\theta^2$ より，

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{1}{3}\theta^2-\left(\frac{1}{2}\theta\right)^2=\frac{1}{12}\theta^2.$$

(ii) $\mathrm{P}(\text{切りくずの標本中の最大の長さ}\le x)=\mathrm{P}(n\text{個すべての切りくずの長さ}\le x)$ (*)

である．各 X_i の累積分布関数は $F(x)=P(X\le x)=\int_0^x \frac{du}{\theta}=\left[\frac{u}{\theta}\right]_0^\theta=\frac{x}{\theta}$ であり，すべての X_i は独立であるので，$(*)=\{F(x)\}^n=\left(\frac{x}{\theta}\right)^n$ となる．これは標本での最大値 $X_{(n)}$の累積分布関数でもある．したがって，これを微分することにより $X_{(n)}$ の確率密度関数は nx^{n-1}/θ^n $(0<x<\theta)$ と求められる．このとき $E(X_{(n)})=\int_0^\theta \frac{nx^n}{\theta^n}dx=\frac{n}{\theta^n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^\theta=\frac{n\theta}{n+1}$ であり，

$E(X_{(n)}^2)=\int_0^\theta \frac{nx^{n+1}}{\theta^n}dx=\frac{n}{\theta^n}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^\theta=\frac{n\theta^2}{n+2}$ より，分散は $\mathrm{Var}(X_{(n)})=E(X_{(n)}^2)-\{E(X_{(n)})\}^2$

$=\frac{n\theta^2}{n+2}-\frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2}=n\theta^2\left(\frac{(n+1)^2-n(n+2)}{(n+2)(n+1)^2}\right)=\frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$ となる．

また，ただちに $E\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}\right)=\theta$ となることが分かるので，$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ はθ の不偏推定量であり，この分散は

$$\mathrm{Var}\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}\right)=\frac{(n+1)^2}{n^2}\mathrm{Var}(X_{(n)})=\frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}=\frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

である．

(iii) (i)より $E(X)=\theta/2$ である．よって$\theta/2$ のモーメント法による推定量は $\bar{X}$ となるから，θ のモーメント法による推定量は $2\bar{X}$ となる（必要に応じて $\frac{2}{n}\sum X_i$ と記す）．この分散は

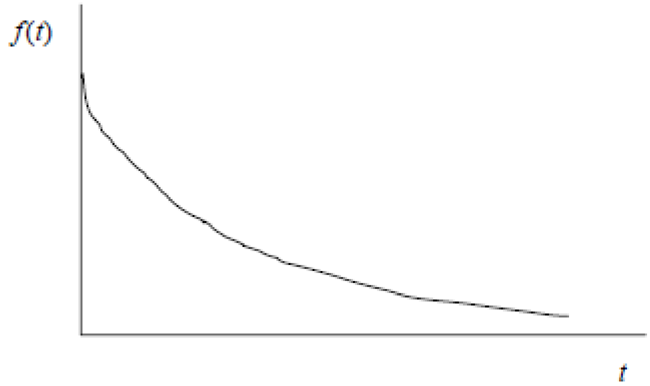
$$\mathrm{Var}\left(\frac{2}{n}\sum X_i\right)=\mathrm{Var}(2\bar{X})=4\mathrm{Var}(\bar{X})=\frac{4}{n}\mathrm{Var}(X)=\frac{4}{n}\frac{\theta^2}{12}=\frac{\theta^2}{3n}$$

である．

Question 2

(i) $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$,　$t>0$,　$\lambda>0$

(a) $f(t)$ の概形は以下のとおり．（注：曲線は滑らかな減少指数関数として描かれるべきであるが，電子的に複写した影響により，多少ギザギザした部分があるかもしれない．）



(b) 累積分布関数は $F(t)=P(T\le t)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda v}dv=\lambda\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda v}\right]_0^t=1-e^{-\lambda t}$ となる．

(c) $P(a\le T\le b)=F(b)-F(a)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$.

(ii) 請求書への支払いは全て独立に分布していると仮定する．

第 1 週目に 50 枚の請求書に支払われる確率は，50 枚全てで $T\le 1$ となるから $\{F(1)\}^{50}=\left(1-e^{-\lambda}\right)^{50}$ ．同様に，第 2 週目に 35 枚に支払われるためには $1<T\le 2$ であればよいので，その確率は $\mathrm{P}(2週目に35枚)=\{F(2)-F(1)\}^{35}=\left(e^{-\lambda}-e^{-2\lambda}\right)^{35}$ となる．
残りの 15 枚は $T>2$ で確率は $1-P(T\le 2)=e^{-2\lambda}$ だから，P(2 週目以降に 15 枚) $=(e^{-2\lambda})^{15}$ となる．したがって尤度はこれらの積として

$$L(\lambda)=k\left(1-e^{-\lambda}\right)^{50}\left(e^{-\lambda}-e^{-2\lambda}\right)^{35}\left(e^{-2\lambda}\right)^{15}$$

と表される．ここに k は比例定数である．自然対数をとると

$$\begin{aligned}\log L(\lambda)&=\log k+50\log(1-e^{-\lambda})+35\log\{e^{-\lambda}(1-e^{-\lambda})\}+15\log(e^{-2\lambda})\\&=\log k+85\log(1-e^{-\lambda})-(35+30)\lambda=\log k+85\log(1-e^{-\lambda})-65\lambda\end{aligned}$$

となり，これを微分して 0 とおくと

$$\frac{d}{d\lambda}\log L(\lambda)=\frac{85e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}-65=\frac{85}{e^{\lambda}-1}-65=0$$

であるから，$85=65(e^{\lambda}-1)$ ，$e^{\lambda}=150/65$ より $\hat{\lambda}=\log(150/65)=0.836$ が得られる．

（これが実際に尤度を最大にすることは $\dfrac{d^2}{d\lambda^2}\log L = -\dfrac{85}{\left(e^{\lambda}-1\right)^2} < 0$ より容易に確認できる.）

(iii) $1-e^{-0.836}=0.5666,\quad e^{-0.836}-e^{-1.672}=0.43344-0.18787=0.2456$ であるから，このモデルでは，100 枚の請求書のうち，第 1 週目に 56.66 枚，第 2 週目に 24.56 枚，そして 2 週目以降に 18.78 枚に対して支払われることが期待される．実際の枚数は 50，35，15 であった．第 2 週目の予測値は，他 2 つの期間ではその差が小さかったことと比べ，実際とはかなりかけ離れている．したがって，このモデルはそれほど当てはまっているとは言えないようである．

Question 3

$$f(x)=\begin{cases}\lambda^{k+1}x^k e^{-\lambda x}/k! & (x>0)\\ 0 & (x\le 0)\end{cases}$$ ，（$\int_0^\infty u^m e^{-u}du=m!$ は与えられている.）

(i) X のモーメント母関数は

$$E(e^{\theta X})=\int_0^\infty \frac{\lambda^{k+1}}{k!}x^k e^{-(\lambda-\theta)x}dx \quad \text{(変数変換 }(\lambda-\theta)x=u\text{ をほどこす)}$$
$$=\frac{\lambda^{k+1}}{k!(\lambda-\theta)^{k+1}}\int_0^\infty u^k e^{-u}du \quad \text{(この積分は与えられた 結果より }k!\text{)}$$
$$=\left(\frac{\lambda}{\lambda-\theta}\right)^{k+1}$$

となる.

（条件$\theta<\lambda$は，u が変換によって正のままであることを保証するために必要であることに注意.）

(ii) $Y=X_1+X_2+\cdots+X_n$ で，すべての X_i は互いに独立である．よって，モーメント母関数について畳み込み定理を用いることにより，Y のモーメント母関数は，単に X のモーメント母関数の n 乗となる．つまり

$$M(\theta)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-\theta}\right)^{nk+n}=\lambda^{nk+n}(\lambda-\theta)^{-nk-n} \qquad (\theta<\lambda) \quad .$$

Y の期待値は$M'(0)$，分散は$M''(0)-(\text{期待値})^2$ で得られる.

モーメント母関数を微分すると$M'(\theta)=\lambda^{nk+k}(-nk-n)(\lambda-\theta)^{-nk-n-1}\cdot(-1)$ であるので $\theta=0$ を代入し，期待値 $E(X)=M'(0)=(nk+n)/\lambda$ が得られる.

さらに微分すると $M''(\theta)=(nk+n)\lambda^{nk+k}(-nk-n-1)(\lambda-\theta)^{-nk-n-2}\cdot(-1)$ であるので $\theta=0$ を代入すると $E(X^2)=M''(0)=(nk+n)(nk+n+1)/\lambda^2$ であるから Y の分散は

$$\mathrm{Var}(Y)=\frac{(nk+n)(nk+n+1)}{\lambda^2}-\frac{(nk+n)^2}{\lambda^2}=\frac{nk+n}{\lambda^2}$$

となる.

(iii) Y のモーメント母関数は X のモーメント母関数の $k+1$ を $nk+n$ に，つまり k を $nk+n-1$ に置き変えた形をしている．分布とモーメント母関数の一意性の関係より，このこと（k を $nk+n-1$ に置き変えること）は確率密度関数についても当てはまらなければならない.

したがって Y の確率密度関数は以下のようになる.

$$\begin{cases}\dfrac{\lambda^{nk+n}}{(nk+n-1)!}y^{nk+n-1}e^{-\lambda y} & (y>0)\\ 0 & (y\le 0)\end{cases}$$

Question 4

(a) (i) 標本分布の期待値が推定するパラメータの値と等しいとき，推定量は「不偏」である．標本サイズ→∞のときに，推定量と推定するパラメータとの差が微小量 ε 以上となる確率が 0 に近づくならば，推定量は「一致性」を持つ．しかしながら分散に基づいた基準の方が使いやすい．標本サイズ→∞で標本分布の分散→0 となるなら，推定量は一致性を持つ．（この基準を偏りのある推定量（つまり推定量が誤った値に収束する場合）に用いるときには注意が必要である．標本サイズ→∞のときバイアス自体が 0 に収束するならば，分散に基づくこの基準は妥当である．）

$N(\mu,\ \sigma^2)$ における μ の推定量は $\bar{X}$ であり，標準的な結果は $E(\bar{X})=\mu$，$\mathrm{Var}(\bar{X})=\sigma^2/n$ である．よって $\bar{X}$ は不偏でかつ一致性を持つ．

σ^2 の推定量は $\dfrac{1}{n}\sum(X_i-\bar{X})^2$ である．これは不偏ではない．標準的な結果より不偏となるためには分母が n ではなく $n-1$ である必要があるが，この（分母が n の）推定量の期待値は $\{(n-1)/n\}\sigma^2$ である．しかしながら，この推定量は一致性を有する．

(ii)

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X+Y)&=E[\{X+Y-E(X+Y)\}^2]\\&=E[\{X-E(X)\}^2+\{Y-E(Y)\}^2+2\{X-E(X)\}\{Y-E(Y)\}]\\&=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)\ .\end{aligned}$$

(iii) $E(\bar{X})=E((X_1+X_2)/2)=(\mu+\mu)/2=\mu$ なので，$\bar{X}$ は不偏である．また分散は

$\mathrm{Var}(\bar{X})=\dfrac{1}{4}\mathrm{Var}(X_1+X_2)=\dfrac{1}{4}\{\mathrm{Var}(X_1)+\mathrm{Var}(X_2)+2\mathrm{Cov}(X_1,X_2)\}$ であり，いま

$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=\rho\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)\mathrm{Var}(X_2)}=\rho\sigma^2$ であるので，

$Var(\bar{X})=\dfrac{1}{4}(\sigma^2+\sigma^2+2\rho\sigma^2)=\dfrac{1}{2}\sigma^2(1+\rho)$ が得られる．

考えられる 3 つの状況 (A)，(B)，(C) それぞれのうちで最も小さい分散を得たい．これは明らかに $\rho<0$ の負の相関のとき（ 状況 (C) ）である．

(b) $f(x,y)=e^{-x-y}\quad x>0,\ y>0$

X の周辺分布は“y について積分すること”で以下のように与えられる．

$$f_X(x)=\int_0^\infty e^{-x}e^{-y}dy=e^{-x}[-e^{-y}]_0^\infty=e^{-x}[0-(-1)]=e^{-x}\ .$$

これは期待値 1，分散 1 の指数分布である．期待値と分散は単純に積分計算を行う事でも求めることができる．

対称性から，Y は X と同じ（周辺）分布を持つ．（対称性に気づかなければ，上と同じ方法で x に関して積分することでこの周辺分布は容易に得られる．）

同時確率密度関数 $f(x, y)$ が X と Y の周辺確率密度関数の積として表されるので, X と Y は独立である.