RSS Higher Certificate in Statistics, Specimen A

Module 5 : Further Probability and Inference

1. 以下の各問に答えよ．

(i) 連続型確率変数 X の確率密度関数が

$$f(x) = \alpha(1-x)^{\alpha-1}, \quad 0 < x < 1, \quad \alpha > 0$$

で与えられているとする．累積分布関数 $F(x)$ を求めよ.また，X の中央値はいくらか. さらに，$\alpha = 3$ のときの $f(x)$ と $F(x)$ のグラフの概形を描け．

(ii) この分布からの n 個の無作為標本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が得られ，これらを用いてパラメータ α の値を推定するとする．これらのデータに基づく α の尤度関数 $L(\alpha \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を与え，α の最尤推定値 (MLE) は

$$\hat{\alpha} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \log(1-x_i)}$$

となることを示せ．さらに，$\dfrac{d^2 \log L(\alpha \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)}{d\alpha^2}$ を α および n の関数として求めよ．$\hat{\alpha}$ は近似的に平均 α，分散 $-1\Big/\left(\dfrac{d^2 \log L(\alpha \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)}{d\alpha^2}\right)$ の正規分布に従うことを仮定して，α の近似的な 90%信頼区間を導け．この信頼区間を，観測値が 0.12，0.43，0.07，0.87，0.29 であるとして実際に計算せよ．

2. 確率変数 X は確率関数が

$$f(x) = (1-p)^x p, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, \quad 0 < p < 1$$

である幾何分布に従うとする．

(i) $p = 1/3$ のとき，$0 \le X \le 5$ の範囲での $f(x)$ のグラフの概形を描け．

(ii) X の確率母関数 $G(s)$ は

$$G(s) = \frac{p}{1-(1-p)s}, \quad |s| < \frac{1}{1-p} \qquad (*)$$

で与えられることを示し，X の期待値と分散を求めよ．

(iii) Y および Z を共に $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$ の値を取る互いに独立な離散型確率変数とし，それらの確率母関数をそれぞれ $G_Y(s)$ および $G_Z(s)$ とする．このとき，和 $Y + Z$ の確率母関数は $G_Y(s)G_Z(s)$ となることを示せ．これより，X_1 および X_2 が互いに独立でそれぞれ (*) で与えられる確率関数を持つとき，和 $X_1 + X_2$ の確率母関数を求めよ．

3. 以下の各問に答えよ．

(i) パラメータ θ の点推定量が持つ以下の各性質の重要性について簡潔に述べよ．答を θ

の 2 種類の推定量で一方はその性質を持ち，もう一方はその性質を持たないという例，たとえば (A) については 1 つは偏りのある推定量もう 1 つは不偏推定量であるもの，を挙げながら説明せよ．

(A) 不偏性 (unbiasedness)

(B) 一致性 (consistency)

(C) 有効性 (efficiency)

(ii) X を範囲 $0 \le X \le \theta$ において連続一様分布に従う確率変数とする．$X_1, X_2, \ldots, X_n$ をこの分布からの無作為標本を表す確率変数としたとき，以下に答えよ．

(A) θ の最尤推定量は $\hat{\theta} = X_{\max}$ すなわち標本での最大値であることを示せ．

(B) 最尤推定量 $\hat{\theta}$ は偏りのある推定量であること，および修正された推定量 $\{(n+1)/n\}X_{max}$ は不偏であることを示せ．このとき，X_{max} の確率密度関数 $f(x)$ は

$$f(x) = nx^{n-1}/\theta^n, \quad 0 \le x \le \theta$$

であることを用いてもよい．

(C) θ のモーメント法による推定量は，$\overline{X}$ を標本平均としたとき $2\overline{X}$ で与えられ，これは θ の不偏推定量であり，その分散は $\theta^2/(3n)$ である．また，上記 (ii) で与えられた修正された推定量の分散は $\theta^2/\{n(n+1)\}$ である．X の分布からの 6 個の観測値が 1.5, 0.7，1.2，2.8，0.5，1.1 であるときのモーメント法による推定量および修正された最尤推定量 $\{(n+1)/n\}X_{max}$ の値をそれぞれ求めよ．これらの推定量を，上記の (i) でリストされた各性質に関する議論を踏まえながら，θ の点推定量として比較せよ．

4. 次の表は 2 つの確率変数 X および Y の同時分布を示したものである．

		Values of Y			
		1	2	3	4
Values of X	1	$6c$	$3c$	$2c$	$4c$
	2	$4c$	$2c$	$4c$	0
	3	$2c$	c	0	$2c$

(i) c の値はいくらか.

(ii) X および Y の周辺分布を求めよ．

(iii) $E[X]$ および $V[X]$ を計算し，共分散は $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0$ となることを示せ．

(iv) X と Y は独立であるかどうかをその理由と共に示せ．

(v) 確率変数 U および V を

$U = 1$ if $X = 1$ or 3, $U = 0$ if $X = 2$,

$V = 1$ if $Y = 1$ or 3, $V = 0$ if $Y = 2$ or 4

により定義する．U と V の同時分布を表にまとめ，U と V が独立であるかどうかをその理由と共に示せ．