RSS Higher Certificate in Statistics, Specimen B

Module 2 : Probability Models

1. 以下の各問に答えよ．

(i) 確率変数 X は確率関数

$$f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,\ldots$$

を持つポアソン分布に従うとする．

(a) X の期待値と分散は共に λ であることを示せ．

(b) 二項分布のポアソン近似とは何かを説明し，それが適当であるのはどのような場合であるかを述べよ．

(ii) 市役所の担当者は失業者に対する社会保障費の計算をしている．保障費の支払額は各個人の事情によって異なり，正確を期してはいるがときとして支払額に誤りが生じる．これまでの長期間の経験では，誤りの生じる確率は 0.0075 であるという．200 人の該当者に対し，(a) 誤りが 1 回のみ生じる確率，(b) 誤りが 4 回生じる確率，をそれぞれ小数点以下 4 桁まで求めよ．

(iii) 上問 (ii) の計算を二項分布のポアソン近似を用いて行え．また，ポアソン近似の相対誤差を小数点以下 2 桁まで求めよ．そして得られた結果について簡潔にコメントせよ．

2. アルタマニア国の住民の身長 H は平均 160cm, 標準偏差 4cm の正規分布 $N(160, 4^2)$ に従うとする．

(i) アルタマニア国全体で身長が平均から 1 標準偏差以内の住民の割合を求めよ．また，身長が 168cm 以上である割合を求めよ．

(ii) アルタマニア警察 (APF) では警官の身長が 168cm 以上でなければならないとしていて，実際全警察官はその条件を満足している．

(a) APF の警察官全体の身長の中央値を求めよ．

(b) APF の警察官の中で身長が 170cm 以上であるものの割合を求めよ．

(iii) APF の警察官の身長の平均は 169.5cm で標準偏差は 1.352cm であるとする．APF の警察官の中から無作為に選んだ 25 人の平均身長が 170cm 以上となる確率の近似値を求めよ．

3. 事象 A, B, C の生じる確率はそれぞれ 2/3, 1/2, 1/4 であるとし， $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ をそれぞれの余事象とする．

(i) A, B, C はそれぞれ互いに独立であるとしたとき，以下の各確率を求めよ．

$$\text{(a) } P\left(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}\right), \qquad \text{(b) } P\left(A \cap \bar{C} \middle| A \cap \bar{B}\right).$$

(ii) 次に，A と B とは互いに独立，A と C も互いに独立，B と C も互いに独立，すなわ

ち A, B, C はそれぞれ対ごとに独立とし，$P\left(A \cap B \cap C\right) = x$ とする．以下の各確率を x の関数として求めよ．

$$\text{(a) } P\left(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}\right), \quad \text{(b) } P\left(A \cap \bar{C} \middle| A \cap \bar{B}\right), \quad \text{(c) } P\left(A \cup B \cup C\right)$$

また，x の取り得る最大値と最小値を求めよ．

4. 確率変数 X は確率関数が

$$f(x) = (1-p)^x p, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, \quad 0 < p < 1$$

で与えられる幾何分布に従うとする．

(i) $p = 1/3$ としたときの $f(x)$ のグラフを $0 \le x \le 5$ について描け．

(ii) X の期待値と分散を求めよ．

(iii) 任意の非負整数 x に対し，$\Pr(X \ge x) = (1-p)^x$ を導き，任意の非負整数 l および m に対し

$$\Pr(X \ge l + m \mid X \ge l) = \Pr(X \ge m)$$

であることを示せ．

(iv) Y は確率関数

$$g(y) = (1-\theta)^y \theta, \quad y = 0, 1, 2, \ldots, \quad 0 < \theta < 1$$

を持つ確率変数で, X と Y は互いに独立であるとする. また, 確率変数 Z を X と Y の小さいほう, すなわち $Z = \min(X, Y)$ と定義する. このとき, 任意の非負整数 z に対し, $P(Z \ge z) = P(X \ge z$ かつ $Y \ge z)$ であることに注意して $P(Z \ge z)$ を求めよ. また, $P(Z \ge z) - P(Z \ge z + 1)$ の考察，あるいは他の方法を用いて

$$P(Z = z) = [(1-p)(1-\theta)]^z (p + \theta - p\theta), \quad z = 0, 1, 2, \ldots$$

であることを示せ．さらに，この Z の確率分布は何であるかを述べるとともに，$E\,[Z]$ および $\mathrm{Var}\,[Z]$ を求めよ．