

RSS Higher Certificate in Statistics, Specimen A

Module 2 : Probability Models

1. あるハイテク会社では、3つの研究グループ (A, B, C) のメンバーがある技術的な問題を解くコンテストにエントリーすることが要請されている。各グループのスタッフの数は、グループ A では2人、グループ B では3人、グループ C では5人である。各スタッフはそれぞれ互いに独立にコンテストにエントリーするかどうかを決めるとし、グループ A, B および C の各メンバーがエントリーする確率はそれぞれ $1/2$, $1/4$, $1/5$ であるとする。
 - (i) グループごとに、(a) 1人もエントリーしない確率、および (b) 1人のみエントリーする確率をそれぞれ求めよ。
 - (ii) 全体で1人のみがエントリーしたとしたとき、それがグループ A のメンバーである確率は $8/17$ であることを示せ。
 - (iii) 全体でちょうど2人がエントリーする確率を計算する手順を示せ (実際に計算する必要はない)。

2. 連続型確率変数 X の確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} kx^2(1-x)^2 & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

で与えられるとする。

- (i) 定数 k の値を求め、 $f(x)$ の概形を描け。
- (ii) $E[X]$ および $\text{Var}[X]$ を求め、 $P\left(X \leq \frac{1}{3}\right) = \frac{17}{81}$ であることを示せ。
- (iii) この分布に従う互いに独立な5つの確率変数の値すべてが $1/3$ を超える確率を小数点以下4桁で求めよ。
- (iv) この分布に従う互いに独立な5つの確率変数の標本平均の分散を小数点以下4桁で求めよ。

3. ある人は自宅から職場まで自転車で通勤していて、その通勤時間は特別な理由のない限り $N(15, 1)$ 、すなわち平均15分、標準偏差1分の正規分布に従うという。

- (i) 特別な理由のないとき、通勤時間が17分以下である確率を求めよ。
- (ii) 通勤の途中に3つの信号があり、赤信号になったときはランダムに $N(0.7, 0.09)$ に従う分だけ余分に時間がかかる。信号の表示はそれぞれ独立であるとし、以下の各条件の下で通勤時間が17分以下である確率を求めよ。
 - (a) 赤信号に1回だけ出くわす場合
 - (b) 赤信号に2回出くわす場合

(c) 赤信号に3回出くわす場合

(iii) 各信号で赤信号に出くわす確率は 0.5 であるとしたとき、通勤時間 T の平均値は 16.05 分であることを示せ.

(iv) 通勤時間 T の分散が $\text{Var}(T) = 1.5025$ であるとして、10 日間の通勤時間の平均が 17 分以下である確率を、適当な近似を用いて計算せよ.

4. 確率変数 X は二項分布 $B(n, p)$ に従うとする. $B(n, p)$ の確率関数は $q = 1 - p$ として

$$f(x) = {}_n C_x p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n, \quad 0 < p < 1$$

で与えられる. このとき, $E(X) = np$, $\text{Var}(X) = npq$ であることを示せ.

ある学校の数学のクラスの生徒は A もしくは B のグループのいずれかに分けられ, グループ A は 12 人, グループ B は 25 人の生徒からなる. 両方のグループの生徒は 16 問の問題からなるテストを受け, グループ A の各生徒の点数は $B(16, 0.75)$ に従い, グループ B の各生徒の点数は $B(16, 0.5)$ に従うとする. また各生徒は互いに独立に解答するとする.

(i) 以下の各確率を求めよ.

(a) グループ A のある生徒が 16 問とも正答する確率

(b) グループ A に 16 問正答する生徒が少なくとも 1 人いる確率

(ii) グループ B のある生徒がグループ A のある生徒よりも正答数が多い確率を適当な近似を用いて求めよ.

(iii) グループ A の生徒の平均点を \bar{X} とし, グループ B の生徒の平均点を \bar{Y} とする. $E(\bar{X})$

および $E(\bar{Y})$ を求め, $\text{Var}(\bar{X}) = 1/4$ および $\text{Var}(\bar{Y}) = 4/25$ であることを示せ.