RSS Higher Certificate in Statistics, Specimen A

Module 2 : Probability Models

Solutions

Question1

(i) A: (a) $P(0\text{ entries}) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} = 0.25$

(b) $P(1\text{ entry}) = 2 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = 0.5$

B: (a) $P(0\text{ entries}) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{27}{64} = 0.4219$

(b) $P(1\text{ entry}) = 3 \times \dfrac{1}{4} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{27}{64} = 0.4219$

C: (a) $P(0\text{ entries}) = \left(\dfrac{4}{5}\right)^5 = \dfrac{1024}{3125} = 0.3277$

(b) $P(1\text{ entry}) = 5 \times \dfrac{1}{5} \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^4 = \dfrac{256}{625} = 0.4096$

(ii) $P\left(1\text{ entry in total}\right)$

$= P\left(1\text{ from A, 0 from B and C}\right) + P\left(1\text{ from B, 0 from A and C}\right) + P\left(1\text{ from C, 0 from A and B}\right)$

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{27}{64} \times \dfrac{1024}{3125} + \dfrac{27}{64} \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1024}{3125} + \dfrac{256}{625} \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{27}{64} = \dfrac{459}{3125}$

（小数だと 0.1469 となる.）

$P\left(1\text{ from A} \mid 1\text{ in total}\right) = P\left(1\text{ from A and } 1\text{ in total}\right) / P\left(1\text{ in total}\right)$

$= P\left(1\text{ from A, 0 from B and C}\right) / P\left(1\text{ in total}\right)$

$= \dfrac{\dfrac{1}{2} \times \dfrac{27}{64} \times \dfrac{1024}{3125}}{\dfrac{459}{3125}} = \dfrac{8}{17}$

(iii) A, B, C からのエントリーの数を (0, 0, 0) などとして示す．このとき，

$P\left(2, 0, 0\right) + P\left(0, 2, 0\right) + P\left(0, 0, 2\right) + P\left(1, 1, 0\right) + P\left(1, 0, 1\right) + P\left(0, 1, 1\right)$

を求める必要がある．それぞれのグループからのエントリーは独立なので，例えば，

$P\left(1, 1, 0\right) = P\left(1\text{ from A}\right) P\left(1\text{ from B}\right) P\left(0\text{ from C}\right)$ と求めればよい．

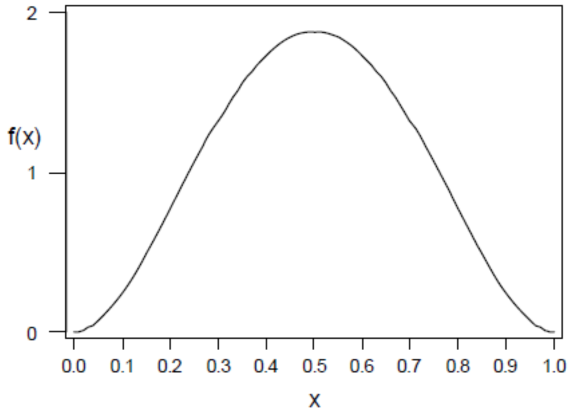
Question 2

(i) $k\int_0^1 x^2(1-x)^2\,dx = 1$ であるから， $k\int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)\,dx = 1$． これは

$$1 = k\left[\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{5}x^4\right] = k\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)$$

を与えるので $k = 30$ となる．

$x = 0,1$ のとき $f(x) = 0$ となり， $f(x)$ は $x = 1/2$ について対称であるから， 図は以下のように示される．



(ii) 対称性より $E(X) = \frac{1}{2}$ である．（あるいは直接 $\int_0^1 xf(x)dx$ を積分しても得られる．）

$$E(X^2) = 30\int_0^1 x^4(1-x)^2\,dx = 30\int_0^1 (x^4 - 2x^5 + x^6)\,dx$$

$$= 30\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{7}x^7\right]_0^1 = 30\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7}\right) = 30 \times \frac{1}{105} = \frac{2}{7}$$

であるから， $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{2}{7} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{28}$ が得られる．

$$P\left(X \le \frac{1}{3}\right) = \int_0^{1/3} 30(x^2 - 2x^3 + x^4)\,dx = 30\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^{1/3}$$

$$= 30\left(\frac{1}{3^4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}\right) = \frac{30}{81}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{15}\right) = \frac{30}{81} \times \frac{17}{30} = \frac{17}{81} (= 0.2099)$$

(iii) 求める確率は $\left(1 - \frac{17}{81}\right)^5 = \left(\frac{64}{81}\right)^5 = 0.3097$ である．

(iv) 標本サイズが 5 のときの $\bar{X}$ の分散は $\frac{\mathrm{Var}(X)}{5} = \frac{1/28}{5} = \frac{1}{140} = 0.00714$．

Question 3

(i) $P\left(X \le 17\right) = \Phi\left(\dfrac{17-15}{1}\right) = \Phi\left(2\right) = 0.9722$.

（ここで，Φ は標準正規分布の累積分布関数である.）

(ii) 信号による遅延時間（正規分布 N (0.7, 0.09) ）を加えたトータルの通勤時間を T とすると，

(a) $T \sim$ N (15.7, 1.09) より $P\left(T \le 17\right) = \Phi\left(\dfrac{17-15.7}{\sqrt{1.09}}\right) = \Phi\left(1.245\right) = 0.8934$

(b) $T \sim$ N (16.4, 1.18) より $P\left(T \le 17\right) = \Phi\left(\dfrac{17-16.4}{\sqrt{1.18}}\right) = \Phi\left(0.552\right) = 0.7096$

(c) $T \sim$ N (17.1, 1.27) より $P\left(T \le 17\right) = \Phi\left(\dfrac{17-17.1}{\sqrt{1.27}}\right) = \Phi\left(-0.0887\right) = 0.4646$

(iii) 遅延の回数は二項分布 $\mathrm{B}\left(3, 1/2\right)$ に従う．したがって (i), (ii)(a), (ii)(b), (ii)(c) が起きる確率はそれぞれ，1/8，3/8，3/8，1/8 となるので，トータルの通勤時間の（全体の）平均は

$$E\left(T\right) = \frac{1}{8} \times 15 + \frac{3}{8} \times 15.7 + \frac{3}{8} \times 16.4 + \frac{1}{8} \times 17.1 = \frac{128.4}{8} = 16.05 \text{ 分}$$

となる.

(iv) 平均時間 $\bar{T}$ は正規分布 N(16.05, 1.5025/10) に従うので

$$P\left(\bar{T} \le 17\right) = \Phi\left(\frac{17-16.05}{\sqrt{0.15025}}\right) = \Phi\left(2.451\right) = 0.9929$$

となる.

Question 4

簡単な方法は X_i を n 個のベルヌーイ変数として，X を $\sum X_i$ と考えることである．ここで，$P(X_i=1)=p$，$P(X_i=0)=(1-p)$ とする．このとき $E[X_i]=p$ であるから $E[X]=np$ となる．また，$E[X_i^2]=p$ であるから，$\mathrm{Var}(X_i)=p-p^2$ より $\mathrm{Var}(X)=n(p-p^2)=npq$ となる．

または，以下のように直接計算をすることにより導かれる．

$$\begin{aligned}E[X]&=\sum_{x=0}^{n}x\binom{n}{x}p^xq^{n-x}=\sum_{x=1}^{n}\frac{n!\,p^xq^{n-x}}{(x-1)!(n-x)!}\\&=np\sum_{x=1}^{n}\binom{n-1}{x-1}p^{x-1}q^{(n-1)-(x-1)}=np\end{aligned}$$

分散については，$\mathrm{Var}(X)=E[X(X-1)]+E[X]-(E[X])^2$ であるから，上記と同様に計算により

$$\begin{aligned}E[X(X-1)]&=\sum_{x=0}^{n}x(x-1)\binom{n}{x}p^xq^{n-x}=\sum_{x=2}^{n}x(x-1)\binom{n}{x}p^xq^{n-x}\\&=n(n-1)p^2\sum_{x=2}^{n}\binom{n-2}{x-2}p^{x-2}q^{(n-2)-(x-2)}=n(n-1)p^2\end{aligned}$$

が求められ，よって $\mathrm{Var}(X)=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=np-np^2=npq$ が得られる．

（確率母関数やモーメント母関数を用いることができる．これは module 5 で扱う．）

(i) (a) $0.75^{16}\approx 0.0100226=0.0100$

(b) $1-P($ 16 問全て正解する人がいない確率 $)$ を求めると

$$1-\{1-0.75^{16}\}^{12}=1-\{0.9899774\}^{12}=0.1139$$

(ii) $P(B-A>0)$ は $B-A$ の正規近似を用いて求めることができる． $B-A$ の正規近似は

$\mathrm{N}\left[(16\times0.5)-(16\times0.75),(16\times0.5\times0.5)+(16\times0.75\times0.25)\right]$，すなわち $\mathrm{N}(-4,7)$ となる．

確率はこの近似を用いて得られるが，$B-A$ は離散値をとるので $P\,(B-A>0+0.5)$ として連続値に調整すると，次のように求められる．

$$\begin{aligned}P(B-A>0.5)&=1-P(B-A<0.5)\\&=1-\Phi\left(\frac{0.5-(-4)}{\sqrt{7}}\right)=1-\Phi\left(\frac{4.5}{\sqrt{7}}\right)=1-\Phi(1.7008)\approx0.0445\end{aligned}$$

（Φ は標準正規分布の累積分布関数を表している．）

（連続値に修正しなければ $P\,(B-A>0)\approx0.0653$ と求められることに注意せよ．）

(iii) グループ A では $E[\bar{X}]=np=16\times0.75=12$. 同様にグループ B では $E[\bar{Y}]=16\times0.5=18$.
グループ A は 12 人の生徒，グループ B は 25 人の生徒がいるので，分散はそれぞれ

$$\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{16 \times 0.75 \times 0.25}{12} = \frac{1}{4}, \quad \mathrm{Var}(\overline{Y}) = \frac{16 \times 0.5 \times 0.5}{25} = \frac{4}{25}$$ となる.