2015年 RSS/JSS 試験（Higher Certificate）

HIGHER CERTIFICATE IN STATISTICS, 2015

モジュール 5：確率と統計的推測の発展的内容

制限時間: 90分

4問中3問を選択の上解答のこと．

各問は合計20点である．小問の配点は括弧の中に記されている．

グラフ用紙と統計数値表は配布する．

解答にあたっては電卓を使用してよい．
ただし，一般財団法人統計質保証推進協会による「受験要領」に
記された範囲で使用すること．

数学記号 log は **e** を底とする自然対数を表す．
その他の底をもつ対数は，例えば $\log_{10}$ のように底を明示する．

また，$\binom{n}{r}$ は ${}_nC_r$ と同じ意味とする．

問題用紙は8頁からなり，それぞれの頁は片面にのみ印刷されている．
この表紙が1頁目である．
第1問は2頁目から始まる．

問題は全部で4問である．

1. 確率変数 X と Y は同時分布をもつ．X と Y の*共分散*および*相関*を定義せよ．X と Y の相関が -1 であるとき，X と Y の間にどのような関係があると言えるか？

(4)

ある母集団において，父親の身長とその長男の身長は 2 変量正規分布に従い，父親の身長は平均 176.0 cm，標準偏差 7.0 cm であり，長男の身長は平均 178.0 cm，標準偏差 7.2 cm である．父親と長男の身長の相関は 0.52 である．

(i) 父親と長男の身長の間の共分散が 26.208 であることを示せ.

(2)

(ii) 父親の身長と長男の身長の平均が 180 cm を超える確率を求めよ.

(7)

(iii) 長男の身長がその父親の身長を少なくとも 5%超える確率を求めよ.

(7)

2. ある町における 1 日の交通事故件数 Y は以下の確率関数を持つパラメータ$\lambda>0$のポアソン分布によってモデル化できる.

$$P(Y=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \qquad k=0, 1, 2, \ldots$$

無作為に n 日を抽出し，それぞれの日における交通事故件数を$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$とする.

(i) Y の確率母関数 (pgf) が $e^{-\lambda(1-t)}$ であることを示せ.

(3)

(ii) pgf を利用して $E(Y)=\mathrm{Var}(Y)=\lambda$ となることを示せ.

(5)

(iii) pgf を利用して $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ の分布を求めよ.

(3)

(iv) λ の最尤推定量$\hat{\lambda}$を求めよ.

(5)

(v) $\hat{\lambda}$ がλのモーメント法による推定量でもあることを示せ.

(2)

(vi) 中心極限定理を利用してλの 95%近似信頼区間を求めよ.（n は十分大きいものとする.）

(2)

3.　無作為標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ はある分布から得られ，その確率密度関数は

$$f(x) = \frac{x^3 e^{-x/\sqrt{\alpha}}}{6\alpha^2} \qquad x > 0,$$

である．ただし$\alpha > 0$ は未知のパラメータとする．この分布のモーメント母関数は$t < 1/\sqrt{a}$ に対し$m(t) = \left(1 - t\sqrt{a}\right)^{-4}$ である．

(i)　モーメント母関数を利用して $E(X_1), E(X_1^2), E(X_1^3), E(X_1^4)$ を求めよ．

(8)

(ii)　$\hat{\alpha} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{20n}$ がαの不偏推定量であることを示せ．

(2)

(iii)　$\mathrm{Var}(\hat{\alpha}) = \dfrac{1.1\alpha^2}{n}$ を示せ．

(3)

(iv)　対数尤度の 2 階微分を求め，$\hat{\alpha}$ の効率を求めよ．

(7)

4. 連続型確率変数 X と Y は同時分布に従い

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{その他}, \end{cases} \qquad f(y|x) = \begin{cases} x^{-1} & 0 < y < x, \\ 0 & \text{その他}, \end{cases}$$

である.

(i) 同時確率密度関数を求め，それが 0 でない領域を図示せよ.

(4)

(ii) Y の周辺確率密度関数を求め， $E(Y) = \frac{1}{3}$ を示せ.

(5)

(iii) 条件付き密度関数 $f(x \mid y)$ を求め，それを利用して $E\left(X \mid Y = \frac{1}{2}\right)$ を計算せよ.

(6)

(iv) $P(Y < \frac{1}{2}X)$ を計算せよ.

(5)

BLANK PAGE

BLANK PAGE

BLANK PAGE