統計検定
Japan Statistical Society Certificate

1級

統計数理

2016 年 11 月 27 日

統計数理

問 1　期待値 μ，分散 1 の正規分布 $N(\mu,1)$ に従う n 個の互いに独立な確率変数を $X_1,\ldots,X_n$ とし $(n>1)$，それらの標本平均を $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i$ とする。以下の各問に答えよ。

なお，正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従う確率変数を X としたとき，その確率密度関数は $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$ であり，モーメント母関数は $M_X(t)=E[e^{tX}]=\exp\left[\mu t+\dfrac{1}{2}\sigma^2t^2\right]$ で与えられることを用いてよい。

〔1〕　$\theta=e^{\mu}$ とする。$X_1,\ldots,X_n$ を基に θ の尤度 $L(\theta)$ を導出し，θ の最尤推定量 $\hat{\theta}$ を求めよ。

〔2〕　上問〔1〕で求めた最尤推定量 $\hat{\theta}$ の偏り（バイアス）を求め，その正負について理由を付して答えよ。また，$\tilde{\theta}=\exp\left[\bar{X}-\dfrac{1}{2n}\right]$ は θ の不偏推定量であることを示せ。

〔3〕　上問〔1〕で求めた最尤推定量 $\hat{\theta}$ の平均二乗誤差 $MSE[\hat{\theta}]=E[(\hat{\theta}-\theta)^2]$ を求め，

$$\lim_{n\to\infty}MSE[\hat{\theta}]=0$$

であることを示せ。

〔4〕　上問〔1〕で求めた尤度 $L(\theta)$ について，フィッシャー情報量 $I(\theta)=E\left[\left\{\dfrac{d}{d\theta}\log L(\theta)\right\}^2\right]$ を求めよ。ここで $\log$ は自然対数を表す。また，上問〔2〕の推定量 $\tilde{\theta}$ の分散は $\dfrac{1}{I(\theta)}$ に一致するか否かを答えよ。

問 2　パラメータ $\lambda(>0)$ の指数分布 $Exp(\lambda)$ に従う確率変数を X とする。X の確率密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

で与えられる。以下の各問に答えよ。

〔1〕　X の期待値は $E[X] = \dfrac{1}{\lambda}$ であることを示せ。

〔2〕　正の定数 c に対し，$Exp(\lambda)$ の上側確率 $Q(c) = P(X > c)$ を求めよ。また，α を $0 < \alpha < 1$ である実数としたとき，$Exp(\lambda)$ の上側 $100\alpha\%$ 点，すなわち $P(X > u(\alpha)) = \alpha$ となる $u(\alpha)$ を求めよ。

以下では，$Exp(\lambda)$ に従う n 個の互いに独立な確率変数を $X_1, \ldots, X_n$ とする。

〔3〕　$X_1, \ldots, X_n$ を基に λ の最尤推定量を求め，それを利用して，上問〔2〕の $Q(c)$ の最尤推定量 $\hat{Q}(c)$，および $u(\alpha)$ の最尤推定量 $\hat{u}(\alpha)$ をそれぞれ求めよ。このとき，$\hat{u}(\alpha)$ は $u(\alpha)$ の不偏推定量であるか否かを答えよ。

〔4〕　$Y = X_1 + \cdots + X_n$ としたとき，Y の確率密度関数は

$$g_n(y) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-\lambda y} & (y \geq 0) \\ 0 & (y < 0) \end{cases}$$

となることを示せ。ここで $\Gamma(n)$ はガンマ関数である。これを利用して，

$$\tilde{Q}(c) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{c}{Y}\right)^{n-1} & (Y \geq c) \\ 0 & (Y < c) \end{cases}$$

は上側確率 $Q(c)$ の不偏推定量であることを示せ。

問 3　線形モデル

$$Y_i = \beta x_i + \epsilon_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

を考える。ここで，Y_i は第 i 番目の観測値を表す確率変数であり，x_i は i ごとに定められた正の定数，β は未知母数である。ϵ_i は誤差を表す互いに独立な確率変数で，期待値は $E[\epsilon_i] = 0$，分散は $V[\epsilon_i] = \sigma^2$ とする $(i = 1, \ldots, n)$。以下の各問に答えよ。

〔1〕　未知母数 β の 2 種類の推定量

$$b_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{x_i}, \quad b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

はそれぞれ β の不偏推定量であることを示せ。

〔2〕　β の最小二乗推定量 b_2 を導出し，その期待値 $E[b_2]$ を求めよ。

〔3〕　上問〔1〕,〔2〕の 3 種類の推定量の各分散 $V[b_0]$，$V[b_1]$，$V[b_2]$ を求め，それらの大小を比較せよ。

問 4　標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数が 0 以上 1 以下の値をとる確率を θ とする。すなわち，$N(0,1)$ に従う確率変数を Z としたとき，

$$\theta = P(0 \leq Z \leq 1) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz$$

である（真値は，正規分布表より $\theta \approx 0.3413$ である）。この θ を，乱数を用いたモンテカルロ法によって推定する。以下の各問に答えよ。

〔1〕　互いに独立な $N(0,1)$ に従う乱数を n 個生成して，それらのうちで 0 以上 1 以下となったものの個数を X とし，$\hat{\theta}_1 = \dfrac{X}{n}$ とする。X の従う分布は何か答えよ。また，$\hat{\theta}_1$ の分散 $V[\hat{\theta}_1]$ を求めよ。

〔2〕　互いに独立な $N(0,1)$ に従う乱数を n 個生成して，それらのうちで絶対値が 1 以下となったものの個数を Y とし，$\hat{\theta}_2 = \dfrac{Y}{2n}$ とする。Y の従う分布は何か答えよ。また，$\hat{\theta}_2$ の分散 $V[\hat{\theta}_2]$ を求めよ。

〔3〕　U を区間 $[0,1]$ 上の一様分布に従う確率変数とする。$\theta = E\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{U^2}{2}\right]\right]$ であるので，区間 $[0,1]$ 上の n 個の互いに独立な一様乱数を $U_1, \ldots, U_n$ とし，期待値を標本平均で推定して

$$\hat{\theta}_3 = \frac{1}{n} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^{n} \exp\left[-\frac{U_i^2}{2}\right]$$

とする。$\hat{\theta}_3$ の分散 $V[\hat{\theta}_3]$ を求めよ。

〔4〕　上問〔1〕の n を 10000 としたとき，$V[\hat{\theta}_1]$ と同じ分散を得るためには，上問〔2〕の $\hat{\theta}_2$ および上問〔3〕の $\hat{\theta}_3$ ではそれぞれおおよそ何個の乱数を必要とするか求めよ。

問 5　2 変量正規分布に従う確率変数ベクトル (X, Y) において，X はすべて観測されるが，Y に欠測が生じ得るとし，互いに独立な観測データを表す確率変数ベクトルを $(X_1, Y_1), \ldots, (X_m, Y_m), (X_{m+1}, ?), \ldots, (X_n, ?)$ とする $(0 < m < n)$。ここで ? はデータの欠測を表す。X の標本平均と標本不偏分散をそれぞれ

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

とし，(X, Y) が両方とも得られている m 組のデータでの X の標本平均，および Y が欠測となった $n-m$ 組での X の標本平均をそれぞれ

$$\bar{X}_{(1)} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \quad \bar{X}_{(0)} = \frac{1}{n-m}\sum_{i=m+1}^{n} X_i$$

とする。

Y の欠測が X の値にも Y の値にもよらずに生じるとき，欠測のメカニズムは完全にランダム（Missing Completely At Random: MCAR）であるという。この MCAR 性を検定する。すなわち検定の帰無仮説は

$$H_0 : Y \text{ の欠測のメカニズムは MCAR} \tag{1}$$

である。

欠測のメカニズムが MCAR であれば，Y の観測部分における X，すなわち $X_1, \ldots, X_m$ の分布と Y の欠測部分の X，すなわち $X_{m+1}, \ldots, X_n$ の分布は等しいはずである。ここでは，それらの平均が共に全体の平均に等しいかどうかを，それらの分散は等しいとの前提で評価する。そこで，検定統計量

$$d^2 = \frac{1}{S^2}\{m(\bar{X}_{(1)} - \bar{X})^2 + (n-m)(\bar{X}_{(0)} - \bar{X})^2\} \tag{2}$$

を用いて (1) の仮説を検定する。以下の各問に答えよ。

〔1〕　$\bar{X} = \dfrac{m\bar{X}_{(1)} + (n-m)\bar{X}_{(0)}}{n}$ であることを用いて

$$d^2 = \frac{1}{S^2}\frac{m(n-m)}{n}(\bar{X}_{(1)} - \bar{X}_{(0)})^2$$

となることを示せ。

〔2〕　全観測値数が n である2水準の一元配置分散分析における群内平方和，群間平方和，総平方和をそれぞれ SS_W, SS_B, SS_T とすると，群間差がないという帰無仮説の下で，確率変数 $F = \dfrac{SS_B}{SS_W/(n-2)}$ は自由度 $(1, n-2)$ の F 分布に従う。また，（2）は $d^2 = \dfrac{SS_B}{SS_T/(n-1)}$ と表せる。このとき，d^2 と F の間には

$$d^2 = \frac{(n-1)F}{n-2+F}$$

なる関係があることを示せ。

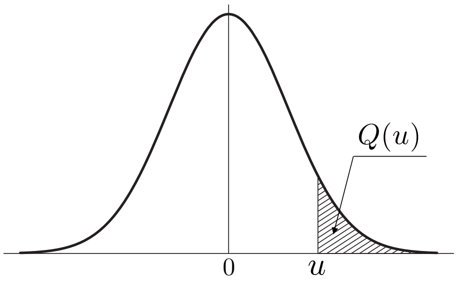
〔3〕　検定統計量 d^2 に基づく検定は2標本両側 t 検定と同等であることを説明せよ。

〔4〕　検定統計量 d^2 に基づく検定が有意であったとき帰無仮説（1）について何がいえるか，逆にその検定が有意でなかったとき（1）について何がいえるかを述べよ。

〔5〕　検定統計量 d^2 に基づく検定は Y が観測された群と Y が欠測となった群の間での X の平均の差に関する検定である。X の平均だけでなく，分布の他の特性に関する検定にはどのようなものがあるかを具体的な検定法を挙げながら論ぜよ。

付　表

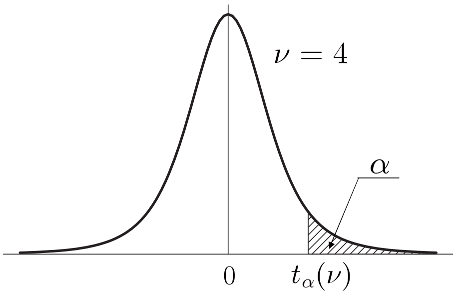
付表 1. 標準正規分布の上側確率



u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

$u = 0.00 \sim 3.99$ に対する，正規分布の上側確率 $Q(u)$ を与える。
例：$u = 1.96$ に対しては，左の見出し 1.9 と上の見出し .06 との交差点で，$Q(u) = .0250$ と読む。表にない u に対しては適宜補間すること。

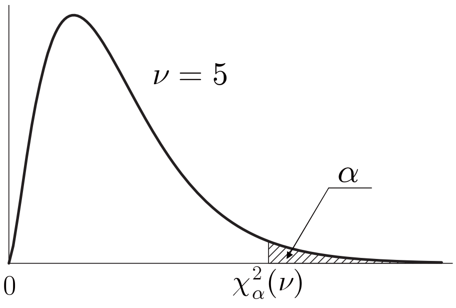
付表 2. t 分布のパーセント点



	α				
ν	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
240	1.285	1.651	1.970	2.342	2.596
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

自由度 ν の t 分布の上側確率 α に対する t の値を $t_\alpha(\nu)$ で表す。
例：自由度 $\nu = 20$ の上側 5%点 ($\alpha = 0.05$) は，$t_{0.05}(20) = 1.725$ である。
表にない自由度に対しては適宜補間すること。

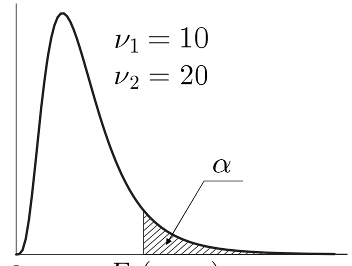
付表 3. カイ二乗分布のパーセント点



	α							
ν	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01
1	0.00	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.63
2	0.02	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21
3	0.11	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.34
4	0.30	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28
5	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09
6	0.87	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81
7	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48
8	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09
9	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67
10	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21
11	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72
12	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22
13	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69
14	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14
15	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58
16	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00
17	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41
18	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81
19	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19
20	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57
25	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31
30	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89
35	18.51	20.57	22.47	24.80	46.06	49.80	53.20	57.34
40	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69
50	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15
60	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38
70	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.43
80	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.88	106.63	112.33
90	61.75	65.65	69.13	73.29	107.57	113.15	118.14	124.12
100	70.06	74.22	77.93	82.36	118.50	124.34	129.56	135.81
120	86.92	91.57	95.70	100.62	140.23	146.57	152.21	158.95
140	104.03	109.14	113.66	119.03	161.83	168.61	174.65	181.84
160	121.35	126.87	131.76	137.55	183.31	190.52	196.92	204.53
180	138.82	144.74	149.97	156.15	204.70	212.30	219.04	227.06
200	156.43	162.73	168.28	174.84	226.02	233.99	241.06	249.45
240	191.99	198.98	205.14	212.39	268.47	277.14	284.80	293.89

自由度 ν のカイ二乗分布の上側確率 α に対する χ^2 の値を $\chi^2_\alpha(\nu)$ で表す。
例：自由度 $\nu = 20$ の上側 5%点 $(\alpha = 0.05)$ は，$\chi^2_{0.05}(20) = 31.41$ である。
表にない自由度に対しては適宜補間すること。

付表 4. F 分布のパーセント点



$\alpha = 0.05$

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	40	60	120	∞
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735	4.619	4.558	4.464	4.431	4.398	4.365
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978	2.845	2.774	2.661	2.621	2.580	2.538
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544	2.403	2.328	2.204	2.160	2.114	2.066
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348	2.203	2.124	1.994	1.946	1.896	1.843
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282	2.236	2.089	2.007	1.872	1.822	1.768	1.711
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165	2.015	1.932	1.792	1.740	1.683	1.622
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077	1.924	1.839	1.693	1.637	1.577	1.509
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993	1.836	1.748	1.594	1.534	1.467	1.389
120	3.920	3.072	2.680	2.447	2.290	2.175	2.087	2.016	1.959	1.910	1.750	1.659	1.495	1.429	1.352	1.254

$\alpha = 0.025$

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	40	60	120	∞
5	10.007	8.434	7.764	7.388	7.146	6.978	6.853	6.757	6.681	6.619	6.428	6.329	6.175	6.123	6.069	6.015
10	6.937	5.456	4.826	4.468	4.236	4.072	3.950	3.855	3.779	3.717	3.522	3.419	3.255	3.198	3.140	3.080
15	6.200	4.765	4.153	3.804	3.576	3.415	3.293	3.199	3.123	3.060	2.862	2.756	2.585	2.524	2.461	2.395
20	5.871	4.461	3.859	3.515	3.289	3.128	3.007	2.913	2.837	2.774	2.573	2.464	2.287	2.223	2.156	2.085
25	5.686	4.291	3.694	3.353	3.129	2.969	2.848	2.753	2.677	2.613	2.411	2.300	2.118	2.052	1.981	1.906
30	5.568	4.182	3.589	3.250	3.026	2.867	2.746	2.651	2.575	2.511	2.307	2.195	2.009	1.940	1.866	1.787
40	5.424	4.051	3.463	3.126	2.904	2.744	2.624	2.529	2.452	2.388	2.182	2.068	1.875	1.803	1.724	1.637
60	5.286	3.925	3.343	3.008	2.786	2.627	2.507	2.412	2.334	2.270	2.061	1.944	1.744	1.667	1.581	1.482
120	5.152	3.805	3.227	2.894	2.674	2.515	2.395	2.299	2.222	2.157	1.945	1.825	1.614	1.530	1.433	1.310

自由度 (ν_1, ν_2) の F 分布の上側確率 α に対する F の値を $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ で表す。
例：自由度 $\nu_1 = 5, \nu_2 = 20$ の上側 5% 点 $(\alpha = 0.05)$ は，$F_{0.05}(5, 20) = 2.711$ である。
表にない自由度に対しては適宜補間すること。

一般財団法人　統計質保証推進協会

統計検定センター

〒101-0051 東京都千代田区神田神保町３丁目６番

URL **http://www.toukei-kentei.jp**

2016.11